

Синтез фрактального обнаружителя объекта на фоне подстилающей поверхности

А.Ю. Паршин, Ю.Н. Паршин

Рязанский государственный радиотехнический университет, г. Рязань, ул. Гагарина, 50/1,
parshin.y.n@rsreu.ru

Проведен синтез и анализ обнаружителя объекта на фоне подстилающей поверхности, основанного на различиях в корреляционной размерности анализируемых данных. Методом максимального правдоподобия получен алгоритм обнаружения. Приведены условия, при которых максимально правдоподобная оценка корреляционной размерности также является достаточной статистикой для задачи обнаружения. Проведен анализ характеристик обнаружения синтезированного обнаружителя фрактального объекта при гауссовской аппроксимации статистики обнаружения.

Synthesis and analysis of detector of object on the subjacent surface that based on differences in correlation dimension of analysable data was implement. Detection algorithm was result maximum likelihood method. Facilities with what maximum likelihood estimation of correlation dimension is sufficient statistic for detection was described. Analysis of detection characteristics of synthesized detector of fractal objects with Gaussian approximation of detection statistic was carry out.

Обработка сигналов, использующая фрактальные их характеристики, в том числе обнаружение объектов на фоне подстилающей поверхности, является предметом интенсивных исследований [1-3]. Подробно анализировались характеристики обнаружения при использовании различных алгоритмов оценивания размерности, а также для различных природных и искусственных объектов. Вместе с тем вопросы оптимальности фрактальных обнаружителей с позиций теории статистических решений исследованы недостаточно.

Подстилающая поверхность и обнаруживаемый объект характеризуется распределением яркости на поверхности Земли. Различия объекта и подстилающей поверхности могут заключаться в форме, законе распределения яркости, корреляционной функции распределения яркости в зависимости от координат и других параметрах и характеристиках. В данной работе основным показателем различия объектов принята их размерность.

Первым этапом синтеза фрактального обнаружителя является расчет расстояний между векторами в псевдофазовом пространстве. По упорядоченной выборке отсчетов изображения, сформированной на основе теоремы Такенса, формируется множество координат векторов. Расстояния между векторами рассчитываются в соответствии с выбранной метрикой, например, евклидовой:

$$l_i = \sqrt{(x_1(t_k) - x_1(t_m))^2 + (x_2(t_k) - x_2(t_m))^2 + (x_3(t_k) - x_3(t_m))^2}.$$

В зависимости от порядка перебора векторов при вычислении расстояний используют: V -статистику $i = 1, \dots, n^2$, $k = 1, \dots, n$, $m = 1, \dots, n$, U -статистику $i = 1, \dots, n(n-1)/2$, $k = 2, \dots, n$, $m = 1, \dots, k-1$, T -статистику $i = 1, \dots, (n-T+1)(n-T)/2$, $k = 1+T, \dots, n$, $m = 1, \dots, k-T$, где T - ширина окна Тейлера, предназначенного для исключения из рассмотрения близкорасположенных векторов и уменьшения влияния их корреляции. Вместе с тем зависимость расстояний может возникать даже при некоррелированных значениях векторов, если число расстояний для данного вектора больше топологической размерности пространства вложения. При измерении расстояния между векторами

только некоторое число расстояний задаются независимо, а остальные определяются предыдущими значениями расстояний, то есть, связаны с ними. При определении положения вектора в T - мерном пространстве достаточно знать расстояния между T другими векторами. Поэтому для расчета корреляционной размерности предлагается использовать только независимые расстояния, например:

- 1) 2-й вектор: расстояния до 1-го вектора,
- 2) 3-й вектор: расстояния до 1-го и 2-го векторов,
- 3) 4-й вектор: расстояния до 1-го, 2-го и 3-го векторов,
- ...
- 4) i -й вектор: расстояния до $i-T$, $i-T+1, \dots, i-1$ векторов,
- ...
- 5) N_{sam} -й вектор: расстояния до $n-T$, $n-T+1, \dots, n-1$ векторов.

При этом число независимых расстояний равно $M = T(N_{sam} - 1) - T(T - 1)/2$, а число векторов, необходимое для получения такого числа расстояний равно: $N_v = \frac{M}{T} + (T - 1)/2 + 1$. Необходимо отметить, что для последующего синтеза требуется независимость расстояний, что может не выполняться при упорядоченном их вычислении. Поэтому при вычислении расстояний целесообразно произвести перемежение элементов U -статистики.

Исходные данные для вычисления корреляционной размерности имеют вид неупорядоченной совокупности расстояний. Будем считать эти расстояния случайными независимыми числами с плотностью распределения вероятностей, соответствующей модели фрактального объекта с постоянной корреляционной размерностью: $w(x) = Dx^{D-1}$, $0 < x < 1$. Используем это распределение вероятностей для синтеза оптимального алгоритма обнаружения объекта с размерностью D_1 на фоне подстилающей поверхности с размерностью D_0 . Достаточной статистикой для задачи обнаружения является отношение правдоподобия или его логарифм [4-5]:

$$z = \ln \Lambda = \ln \frac{\prod_{i=1}^M w_1(x_i)}{\prod_{i=1}^M w_0(x_i)} = \sum_{i=1}^M \left[\ln \frac{D_1}{D_0} + (D_1 - D_0) \ln x_i \right].$$

Если размерности D_0, D_1 объекта и фона априори известны, то алгоритм обнаружения можно представить в виде:

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1, & (D_1 - D_0) \sum_{i=1}^M \ln x_i > h, \\ 0, & (D_1 - D_0) \sum_{i=1}^M \ln x_i \leq h, \end{cases} \quad (1)$$

где значение порога h обнаружения выбирается из заданной вероятности ложной тревоги. С учетом того, что максимально правдоподобная оценка корреляционной размерности при отсутствии усечения данных равна $\hat{D} = -\frac{M}{\sum_{i=1}^M \ln x_i}$ [5], то эту оценку также

можно считать достаточной статистикой обнаружения. Оптимальный алгоритм обнаружения получается постановкой оценки \hat{D} в алгоритм максимального правдоподобия

(1):

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1, & -\frac{M}{\hat{D}}(D_1 - D_0) > h \\ 0, & -\frac{M}{\hat{D}}(D_1 - D_0) \leq h \end{cases}.$$

Множитель $-M(D_1 - D_0)$ с учетом его знака также можно пересчитать в новое значение порога $\hat{\theta} = \begin{cases} 1, & \hat{D} > h_1 \\ 0, & \hat{D} \leq h_1 \end{cases}$. При наличии усечения расстояний сверху вид алгоритма

не изменится, так как после нормировки $x_1 = x/\beta$ задача сводится к случаю без усечения при соответствующем изменении значения порога. Максимально правдоподобная оценка корреляционной размерности является достаточной статистикой задачи обнаружения и в этом случае. При наличии усечения снизу $\alpha > 0$, плотность распределения вероятности расстояний имеет вид: $w(x) = \frac{D}{1-\alpha^D} x^{D-1}$, $\alpha < x < 1$. Отношение правдоподобия для данной плотности определяется выражением:

$$z = \sum_{i=1}^M \left[\ln \frac{D_1(1-\alpha^{D_0})}{D_0(1-\alpha^{D_1})} + (D_1 - D_0) \ln x_i \right],$$

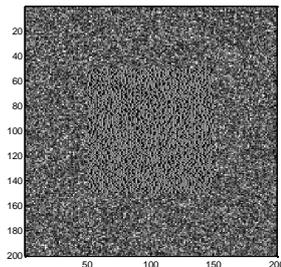
что с точностью до значения порога соответствует алгоритму обнаружения (1). Вместе с тем максимально правдоподобная оценка корреляционной размерности, полученная по усеченной снизу выборке расстояний, не является достаточной статистикой для задачи обнаружения.

Если значения корреляционных размерностей D_1, D_0 заранее неизвестны, то вместо точных значений можно использовать оценки, полученные на предыдущем интервале наблюдений по классифицированной выборке, что приводит к адаптивному алгоритму обнаружения:

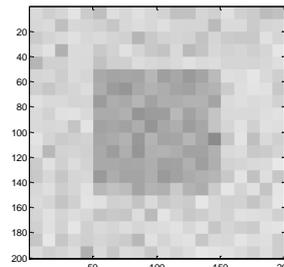
$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1, & (\hat{D}_1 - \hat{D}_0) \sum_{i=1}^M \ln x_i > h \\ 0, & (\hat{D}_1 - \hat{D}_0) \sum_{i=1}^M \ln x_i \leq h \end{cases}, \quad \hat{\theta} = \begin{cases} 1, & \hat{D}(\hat{D}_1 - \hat{D}_0) > h_1 \\ 0, & \hat{D}(\hat{D}_1 - \hat{D}_0) \leq h_1 \end{cases}$$

В качестве примера взят объект квадратной формы, сформированный логистическим отображением $x_{n+1} = 3,95 \times x_n(1-x_n)$ путем построчного формирования раstra, в присутствии независимого релейевского фона с плотностью распределения вероятностей

$f(x) = \frac{x}{\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$; дисперсии фона и объекта равны (рис. 1а).



а - исходное изображение



б - результат фрактальной обработ-

Рис.1. Фрактальный объект в присутствии релейевского фона

Временной ряд для измерения корреляционной размерности формировался сканированием изображения в различных направлениях: по направлению формирования логистического отображения, перпендикулярно направлению формирования логистического отображения, а также псевдослучайным образом. Во всех случаях оценка корреляционной размерности давала схожий результат. На рис. 1б приведен результат оценки корреляционной размерности в растре размером 10×10 пикселей.

Полагая распределение вероятностей статистики обнаружения асимптотически гауссовским, вычислим математическое ожидание и дисперсию:

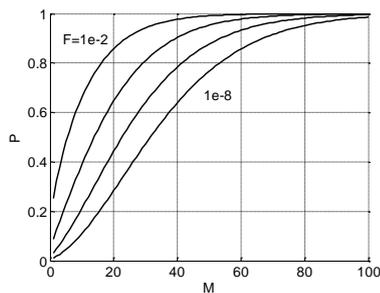
$$m_z = M \left(-\alpha^D \ln \alpha - \frac{1-\alpha^D}{D} \right)$$

$$D_z = \overline{z^2} - m_z^2 = -M \left(-\alpha^D \ln \alpha - \frac{1-\alpha^D}{D} \right)^2 + M \frac{ \left(-(\ln \alpha)^2 \alpha^D + 2(\ln \alpha) \alpha^D / D + \frac{2}{D^2} (1-\alpha^D) \right) }{1-\alpha^D}$$

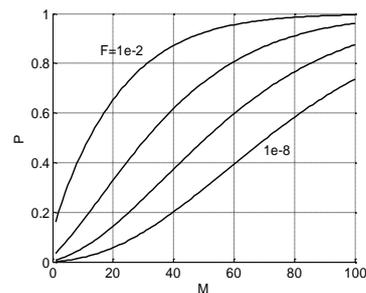
В частном случае $\alpha = 0$: $m_z = -M/D$, $D_z = M/D^2$, $q_z = m_z^2/D_z = M$. Этот результат совпадает с отношением сигнал-шум при использовании в качестве статистики максимально правдоподобной оценки корреляционной размерности. Таким образом, это еще раз доказывает, что максимально правдоподобная оценка корреляционной размерности является достаточной статистикой обнаружения при $\alpha = 0$.

На основе классического подхода [6] получена зависимость вероятности правильного обнаружения от объема выборки расстояний M при заданных значениях корреляционной размерности объекта D_1 и фона D_0 , вероятности ложной тревоги F и $\alpha = 0$:

$$D = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{D_1}{D_0} \left(\sqrt{\frac{M}{2}} + \operatorname{erfcinv}(2F) \right) - \sqrt{\frac{M}{2}} \right).$$



$$\frac{D_1}{D_0} = 0,5$$



$$\frac{D_1}{D_0} = 0,6$$

Рис. 2. Характеристики обнаружения фрактального объекта

Выводы. Проведенный синтез фрактального обнаружителя по критерию максимального правдоподобия позволяет решать задачу обнаружения объектов на фоне подстилающей поверхности. Одной из основных задач практической реализации фрактального обнаружителя является получение совокупности независимых расстояний

между векторами. Выполнение условия независимости позволяет минимизировать вероятности ошибочных решений при ограниченном объеме наблюдаемых данных.

Литература

1. Потапов А.А., Герман В.А. Фрактальный непараметрический обнаружитель радиосигналов // Радиотехника. 2006. № 5. С. 30 – 36.
2. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Потапов А.А., Герман В.А. Идеи скейлинга и дробной размерности в схеме фрактального обнаружителя радиосигналов // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 8. С. 968 – 975.
3. Сосулин Ю. Г., Рускин А. Б. Фрактальное обнаружение протяженных малоконтрастных объектов на изображениях // Радиотехника. 2009. № 12. С. 48-57.
4. Pisarenko D. V., Pisarenko V.F. Statistical estimation of the correlation dimension // Physics Letters A, 1995, V.197, №1 - P.31-39.
5. Luciana De Luca, Dario Luzio, Massimo Vitale. A ML Estimator of the Correlation Dimension for Left-Hand Truncated Data Samples // Pure and applied geophysics, 2002, V.159, №11-12. - P. 2789-2803.
6. Сосулин Ю.Н. Основы радиолокации и радионавигации. – М.: Радио и связь, 1992. – 304 с.