

О реконструкции профиля показателя преломления слоисто-неоднородной диэлектрической среды по амплитудному и энергетическому коэффициентам отражения

А.В. Резвов, Н.А. Денисова*

ОАО «НПП «Полет», 603950 г. Нижний Новгород

Н.А. Денисова, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 603600 г. Нижний Новгород*

avrezvov_nn@mail.ru

Рассмотрены задачи реконструкции профиля показателя преломления полубесконечной диэлектрической среды по частотной зависимости коэффициента отражения $r(\omega)$. Подход основан на использовании точных аналитических решений обратной задачи электромагнитного отражения, получающихся для коэффициентов отражения в виде дробно-рациональной функции. Обсуждаются вопросы однозначности реконструкции по энергетическому коэффициенту отражения. Приведены численные результаты использования указанного подхода при обработке графиков амплитудного коэффициента отражения в заданном частотном интервале.

The article considers the problems of reconstruction of the refraction index profile for the semiinfinite dielectric medium by the frequency dependence of reflectivity $r(\omega)$. The approach is based on using exact analytical inverse solutions of the electromagnetic reflection for the model reflectivities in the form of rational function. Issues of uniqueness of the reconstruction by the energy reflectivity are discussed. Numerical results of using the said approach are presented for processing of the graphics of amplitude reflectivity in the specified frequency domain.

Задача восстановления показателя преломления диэлектрической слоистой неоднородной среды без дисперсии по амплитудному коэффициенту отражения рассматривалась в работах [1]. Позднее эти результаты были обобщены на случай, полубесконечного диэлектрика, когда показатель преломления имеет разрыв первого рода на границе [2]. В данной работе схема решения, предложенная в [2], применена в бездисперсной среде для исследования случая модельных коэффициентов отражения в виде дробно-рациональных функций.

Если из однородного полупространства $z < 0$, с показателем преломления n_a , на слоистую неоднородную среду с показателем преломления $n(z)$ в области $z \geq 0$, падает электромагнитная волна, то при нормальном падении поперечная компонента электрического поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 n_1^2(z) E = 0, \quad n_1(z) = \begin{cases} n_a, & z < 0, \\ n(z), & z \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

В области $z \geq 0$ функция $n(z)$ считается положительной, дважды непрерывно-дифференцируемой, если $z \rightarrow \infty$, то $n(z) \rightarrow n_s$, $n'(z) \rightarrow 0$. Значение показателя преломления на границе будем обозначать $n_s = n(0)$.

Решение уравнения (1) имеет в области $z < 0$ вид $E(z, k) = e^{ik n_a z} + r(k) e^{-ik n_a z}$, а при $z \rightarrow \infty$ - асимптотику $E(z, k) \sim t(k) e^{ik n_s z}$, где непрерывные функции $r(k)$ и $t(k)$ являются амплитудными коэффициентами отражения и прохождения, имеющими на вещественной оси k необходимые свойства $r(-k) = \overline{r(k)}$, $|r(k)| < 1$

Эти функции аналитически продолжаются в комплексную полуплоскость $\text{Im } k > 0$, где справедливы асимптотические формулы

$$r(k) = r_s + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad r_s = \frac{n_a - n_s}{n_a + n_s}. \quad (2)$$

Главное асимптотическое слагаемое r_s в формуле (2) определяет показатель преломления на границе n_s . При $k \rightarrow 0$,

$$r(k) = r_v + o(k), \quad r_v = \frac{n_a - n_v}{n_a + n_v}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что значение коэффициента отражения при $k = 0$ связано со значением показателя преломления на бесконечности n_v . Алгоритм реконструкции показателя преломления по амплитудному коэффициенту отражения $r(k)$, предложенный в [2], основан на решении интегрального уравнения для функции $K(x, y)$, с помощью которой и определяется $n(z)$:

$$n(x) = n_s (1 + K(x, x))^{-2} \quad z(x) = \int_0^x (1 + K(x, x))^2 dx \quad (4)$$

Для коэффициентов отражения в виде дробно-рациональной функции

$$r(k) = r_s + \sum_{j=1}^l \frac{c_j}{k - k_j}, \quad \text{Im } k_j < 0,$$

нахождение $K(x, y)$ сводится к решению линейной системы уравнений относительно функций $f_m(x)$:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^l f_m(x) \frac{1}{r(ia_m) - r_s} \left(\frac{e^{-a_m n_s x}}{a_m + ik_j} - r(ia_m) \frac{e^{a_m n_s x}}{a_m - ik_j} \right) = \frac{i}{(1+r_s)(1-r_v)k_j}, \\ j = \overline{1, l} \end{cases} \quad (5a)$$

задающих эту величину:

$$K(x, y) = \sum_{m=1}^l f_m(x) \left(e^{a_m n_s y} + \frac{1 - r_s r(ia_m)}{r(ia_m) - r_s} e^{-a_m n_s y} \right) + \frac{r_v - r_s}{(1+r_s)(1-r_v)}. \quad (5b)$$

Числа a_m – это $2l$ корней уравнения степени $2l$: $r(ia_m)r(-ia_m) = 1$. В систему (4) входят те корни этого уравнения, которые расположены в правой полуплоскости k .

Профили $n(z)$ находятся аналитически в простых частных случаях, когда коэффициент отражения (12) имеет либо один, либо два полюса. Расположение полюсов в нижней полуплоскости k и параметры функции $r(k)$ (12) должны быть выбраны так, чтобы выполнялись необходимые свойства коэффициента отражения

Коэффициент отражения с одним полюсом можно задать в виде

$$r(k) = r_s + \frac{i\gamma(r_v - r_s)}{k + i\gamma}, \quad \gamma > 0. \quad |r(k)|^2 = \frac{r_s^2 k^2 + \gamma^2 r_v^2}{k^2 + \gamma^2}. \quad (6)$$

Величины r_s, r_v однозначно определяют параметры $n_s = n(0)$ и $n_v = n(\infty)$. в соответствии с формулами (2),(3). Реализуя изложенный выше алгоритм нахождения решения интегрального уравнения находим, что при $r_s < r_v$, когда параметр $\beta_1 > 0$,

$$K(x, x) = cth\beta_1 th(a_1 n_s x + \beta_1) - 1, \quad th\beta_1 = \sqrt{\frac{n_v}{n_s}},$$

и $n(z)$ задается параметрически, согласно формулам (4):

$$n(x) = n_v cth^2(a_1 n_s x + \beta_1) \quad z(x) = \frac{n_s}{n_v} \left(x - \frac{th(a_1 n_s x + \beta_1)}{a_1 n_s} + \frac{th(\beta_1)}{a_1 n_s} \right) \quad (7)$$

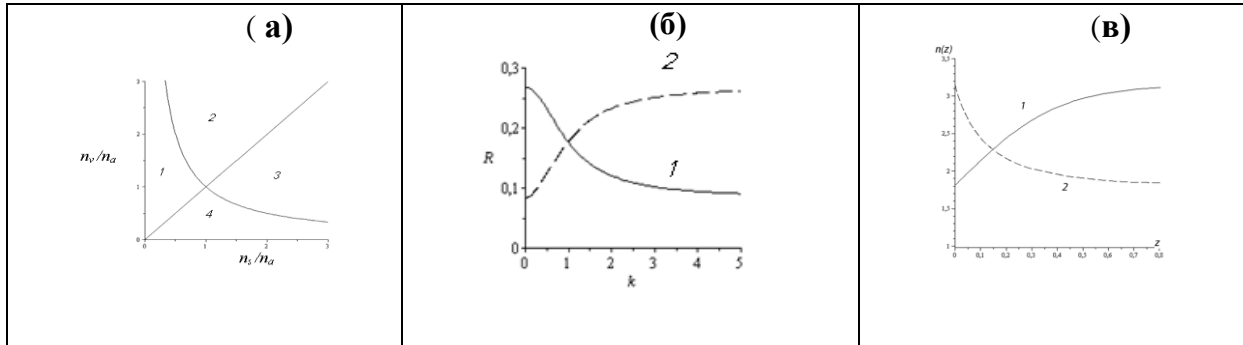
При $r_s > r_v$ число β_1 комплексно: $\beta_1 = \beta + i\pi$, $cth\beta = \sqrt{\frac{n_v}{n_s}}$ и формулы (7) принимают

$$n(x) = n_v th^2(a_1 n_s x + \beta) \quad z(x) = \frac{n_s}{n_v} \left(x - \frac{cth(a_1 n_s x + \beta)}{a_1 n_s} + \frac{cth(\beta)}{a_1 n_s} \right) \quad (8)$$

В выражениях (7),(8) величина β_1 задается как $\frac{1-r_s r(i a_1)}{r(i a_1)-r_s} = e^{2\beta_1}$, $a_1 = \gamma \sqrt{\frac{1-r_v^2}{1-r_s^2}}$.
 Знак разности коэффициентов r_s^2, r_v^2 :

$$r_s^2 - r_v^2 = \frac{4n_a(n_v-n_s)(n_a^2-n_v n_s)}{(n_a+n_s)^2(n_a+n_v)^2}. \quad (9)$$

определяет вид графика энергетического коэффициента отражения $R(k) = |r(k)|^2$ при



$k > 0$. Согласно (9) первый квадрант плоскости n_s, n_v разбивается гиперболой $n_s n_v = n_a^2$ и прямой $n_s = n_v$ на четыре части (рис.1а)

**Рис.1. (а) Области изменения параметров n_s, n_v , (б) Графики $\tilde{R} = |\tilde{r}(k)|^2, \gamma=1$:
 1 - $r_s = -0.289, r_v = -0.518, (r_v < r_s)$, 2 - $r_s = -0.518, r_v = -0.289 (r_s < r_v)$ (в) Графики $n(z)$: 1 - $(r_v < r_s), n_s=1,82, n_v=3,15$; 2 - $(r_s < r_v), n_s=3,15, n_v=1,82$**

При нахождении точки (n_s, n_v) в областях 1 и 3 график функции $\tilde{R}(k)$ монотонно убывает, а в областях 2 и 4 – монотонно возрастает (рис.1б). Соответственно этому функции $n(z)$ из выражений (8) монотонно возрастают, а из выражений (7) монотонно убывают, (рис.1в):

По амплитудному коэффициенту отражения (б) показатель преломления определяется единственным образом. Однако во многих практических ситуациях измеряется энергетический коэффициент отражения $|r(k)|^2$, по которому $n(z)$ находится неоднозначно. Как видно из (5) энергетический коэффициент отражения зависит от квадратов параметров r_s^2, r_v^2 . Из-за этого каждой паре значений (r_s, r_v) соответствуют еще три набора параметров $(-r_s, r_v), (r_s, -r_v), (-r_s, -r_v)$, которые приводят к тому же энергетическому коэффициенту отражения, но к разным амплитудным коэффициентам (21) и, следовательно, к разным функциям $n(z)$. (Рис.4).

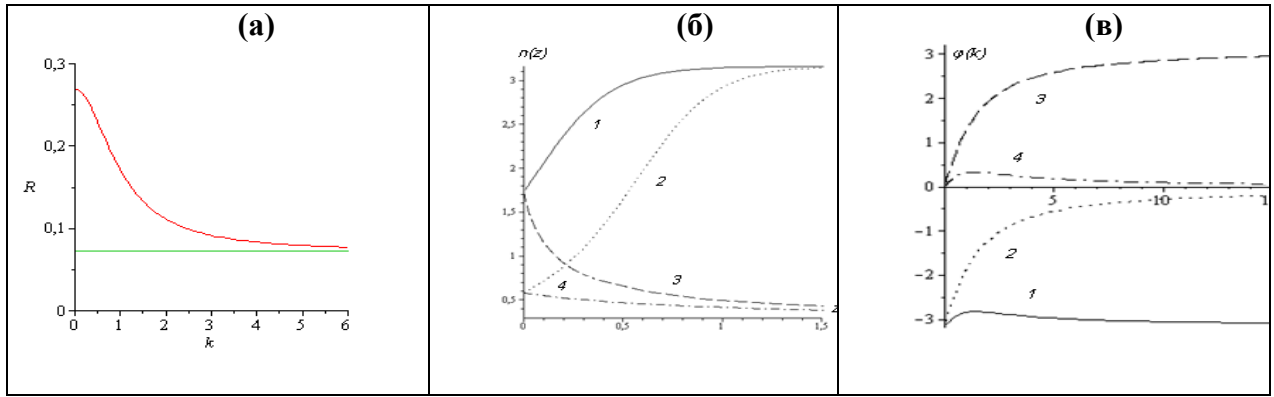


Рис.2. (а) график $\tilde{R} = |\tilde{r}(k)|^2$, $r_s = -0.289$, $r_v = -0.518$ (б) 4 профиля $n(z)$ соответствующих графику (а) и 4 пар значений (r_s, r_v) – профиль 1, $(-r_s, r_v)$ – профиль 2, $(r_s, -r_v)$ – профиль 3, $(-r_s, -r_v)$ – профиль 4 (в) графики 4 соответствующих фазовых функций $\phi_{1,2,3,4}(k)$

Если $n_s = n_v$ или $n_s n_v = n_a^2$ энергетический коэффициент отражения не зависит от волнового числа k и равен r_s^2 . Например один и тот же не зависящий от k энергетический коэффициент отражения $R(k) \equiv r_s^2 \equiv r_v^2$ имеют два однородных полупространства с разными показателями преломления $n(z) \equiv n_s$ и $n(z) \equiv \frac{n_a^2}{n_s}$ и два неоднородных полупространства с профилями показателей преломления (7) и (8), в которых (n_s, n_v) выбраны в виде пар $(n_s, \frac{n_a^2}{n_s})$ и $(\frac{n_a^2}{n_s}, n_s)$. При этом для однородных полупространств не зависят от волнового числа k как модуль, так и фаза коэффициента отражения. Для неоднородных полупространств при постоянстве модуля коэффициента отражения его фаза меняется с изменением k (рис.4,5).

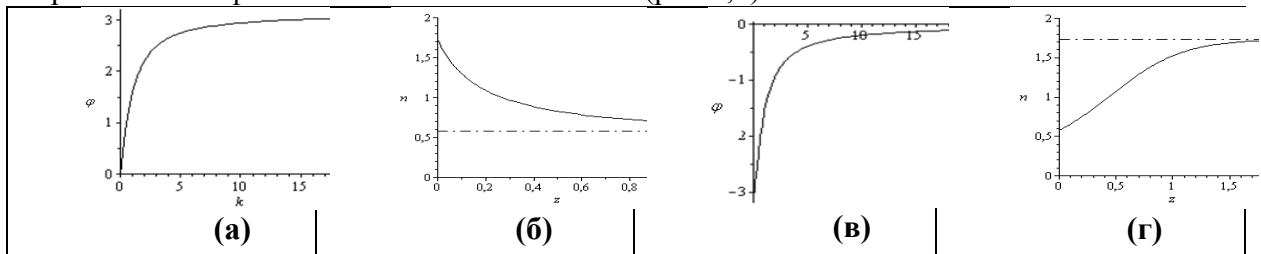


Рис.3. Графики фазы коэффициента отражения с одним полюсом (а), (в) и соответствующего показателя преломления (б), (г). В случае (а) и (б) $r_s = -r_v = -0.289$, для (в) и (г) $r_s = -r_v = 0.289$ $|r(k)|^2 = \text{const} = r_s^2$

2. В случае двух полюсов, расположенных на полуокружности радиуса γ в нижней полуплоскости k симметрично относительно мнимой оси:

$$r(k) = r_s + [iak\gamma - (r_v - r_s)\gamma^2] / (k^2 + 2ibk\gamma - \gamma^2) \quad (10)$$

Здесь a и b - варьируемые параметры. Функция (10) удовлетворяет всем свойствам коэффициента отражения при выполнении неравенств

$$-2r_s b - 2\sqrt{b^2 - b_1^2} \leq \alpha \leq -2r_s b + 2\sqrt{b^2 - b_1^2}, \quad b_1 \leq b < 1, \quad b_1 = [(1 - r_s r_v - [(1 - r_v^2)(1 - r_s^2)]^{1/2})/2]^{1/2}$$

Решение обратной задачи для коэффициентов отражения с двумя полюсами приводит к результату

$$\tilde{n}(x) = n_v \frac{P^2(x)}{Q^2(x)}, \quad \tilde{z}(x) = \frac{n_s}{n_v} \left(x - \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{a_1 a_2 n_s} \left(\frac{Q_1(x)}{P(x)} - \frac{Q_1(0)}{P(0)} \right) \right) \quad (11)$$

$$P(x) = (r_v - r_s)^2 V + \alpha^2 a_1 a_2 U - \alpha (r_v - r_s) (a_1^2 - a_2^2) \text{th}(a_1 n_s x + \beta_1) \text{th}(a_2 n_s x + \beta_2),$$

$$Q(x) = (r_v - r_s)^2 U + \alpha^2 a_1 a_2 V - \alpha (r_v - r_s)(a_1^2 - a_2^2), U = a_1 th(a_1 n_s x + \beta_1) - a_2 th(a_2 n_s x + \beta_2),$$

$$Q_1(x) = (r_v - r_s)^2 + \alpha^2 a_1 a_2 th(a_1 n_s x + \beta_1) th(a_2 n_s x + \beta_2) - \alpha (r_v - r_s) W,$$

$$V = a_1 th(a_2 n_s x + \beta_2) - a_2 th(a_1 n_s x + \beta_1), W = a_1 th(a_1 n_s x + \beta_1) + a_2 th(a_2 n_s x + \beta_2).$$

Здесь $\beta_m = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - r_s \tilde{r}(i a_m)}{r_s - \tilde{r}(i a_m)} \right), m = 1, 2,$ $b_2 = \sqrt{\frac{1 - r_s r_v + \sqrt{(1 - r_v^2)(1 - r_s^2)}}{2}}$

$$a_{1,2} = \frac{1}{2\sqrt{1 - r_s^2}} \left(\sqrt{4(b^2 - b_1^2) - (2br_s + \alpha)^2} \pm \sqrt{4(b^2 - b_2^2) - (2br_s + \alpha)^2} \right)$$

На рисунке 4 приведены графики коэффициентов отражения **(а,в)** и соответствующих коэффициентов преломления **(б,г)**, показывающие, что функции позволяют аппроксимировать отражение от различных неоднородных профилей $n(z)$. (27)

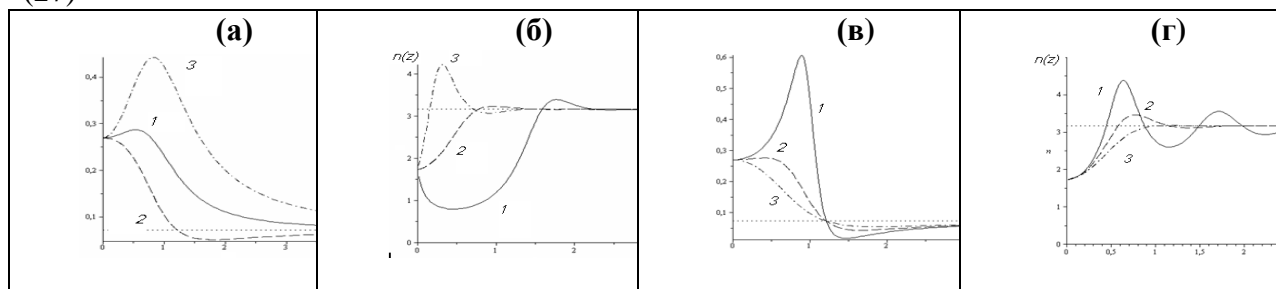


Рис. 4. (а), (б) $r_s = -0.289, r_v = -0.518, b = 0.7$ и $\alpha = 1, \alpha = 0, \alpha = -0.5$ (1), (2), (3)
(б), (г) $r_s = -0.289, \alpha = 0$: $b = 0.2, b = 0.5, b = 0.8$ (1), (2), (3)

Использование точных решений для реконструкции неоднородного профиля $n(z)$

При хорошем приближении измеренного коэффициента отражения дробно-рациональной функцией типа (6),(10) или их линейной комбинацией мы получаем, с помощью формул (7), (8), (11) или численного решения системы (5а) аппроксимацию профиля показателя преломления. Это возможно и когда коэффициент отражения известен только в некотором диапазоне частот. Покажем использование точного решения для аппроксимации функции $n(z)$ по коэффициенту отражения $r(v)$. Воспользуемся данными $r(v)$ в неоднородной среде в диапазоне частот $\Delta v = 0.4 - 2.0$ ГГц приведенными в работе [3] и сравним результаты использования предлагаемого нами метода с измеренным там профилем неоднородности $\varepsilon(z) = n(z)^2$. На рис. 5 сплошной и штриховой линиями проведены аппроксимирующие функции, полученные с помощью формулы (12), а точкам соответствуют значения $n(z)^2$ действительной и мнимой части коэффициента отражения, приведенные в [3]. Указанная на графиках рис.5 безразмерная величина $k = k^*/k_0$ соответствует волновому числу $k^* = 2\pi v/c$, нормированному на значение $k_0 = 2\pi v_0/c$, где $v_0 = 1,4$ ГГц частота максимума функции $Re r(k)$. Безразмерная переменная $z = z^*/\lambda_1 = z^*/\lambda_1$ соответствует размерной глубине z^* , нормированной к длине волны $\lambda_1 = 1/k_0 = c/2\pi v_0, v_0 = 3,4$ см, c – скорость света в вакууме. Диапазону частот $\Delta v = 0.4 - 2.0$ ГГц соответствует интервал $0.29 < k < 1.43$., параметры $r_s, r_v, \alpha, b, \gamma$ функции (12) численно подбирались так, чтобы сумма квадратов уклонений $Re r(k_i)$ и $Im r(k_i)$ от значений, приведенных в работе [4], в точках $k_i = 0.29 + 0.14 * i, i = 0, \dots, 5, \dots, 8$ была минимальной. При найденных параметрах на основе численного решения системы (5а) построен график зависимости $\varepsilon(z) = n^2(z)$

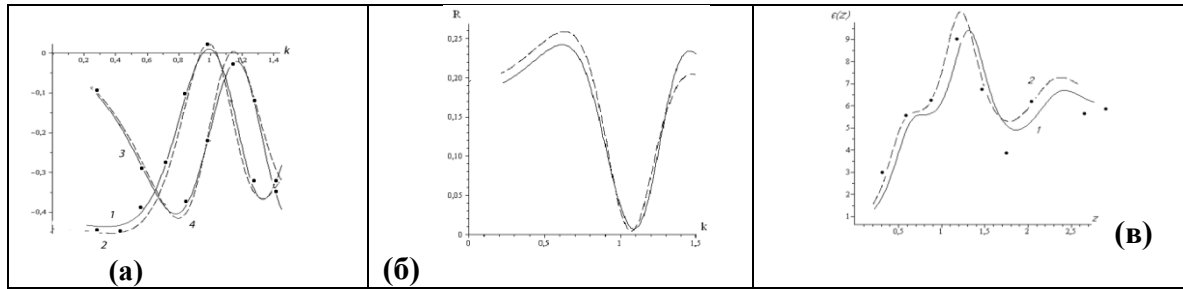


Рис.5.(а) - действительная (1,2) и мнимая (3,4) части $r(k)$, (б) $R=|r(k)|^2$, (в) – диэлектрическая проницаемость, рассчитанные по $r(k)$ из (12) при $r_s=0.08$, $r_v = -0.427$, $a_1 = -31.322$, $b_1=0.322$, $\gamma_1=1.319$, $a_2 = 0.148$, $b_2 = 0.41$, $\gamma_2 = 0.958$, $q=0.011$, штрихи – близкие значения параметров

$$r(k) = r_s + q \frac{i\bar{a}_1 k \gamma_1 - (r_v - r_s) \gamma_1^2}{k^2 + 2i\bar{b}_1 k \gamma_1 - \gamma_1^2} + (1 - q) \frac{i\bar{a}_2 k \gamma_2 - (r_v - r_s) \gamma_2^2}{k^2 + 2i\bar{b}_2 k \gamma_2 - \gamma_2^2}. \quad (12)$$

Как видно из рис.5а, в интервале $0.29 < k < 1.43$ функция (12) достаточно хорошо аппроксимирует график из [3], содержит точку максимума модуля коэффициента отражения. На рис.5в показано, что график $\varepsilon(z)$, соответствующий аппроксимации (12), достаточно близко примыкает к экспериментальным точкам диэлектрической проницаемости в интервале $0,2 < z < 1,5$, в окрестности первого максимума). При $z < 0,2$ и $z > 1,5$ для восстановления диэлектрической проницаемости играют существенную роль значения коэффициента отражения при $k < 0.29$ и $k > 1,43$, не указанные в [3].

Литература

1. S.Coen. Inverse scattering of a layered and dispersionless dielectric half-space, IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-29, pp. 726-732, 1981. G.N.Balanis. Inverse scattering: Determination of inhomogeneities in sound speed, J. Math. Phys., vol. 23, pp.2562-2568, 1982.
2. Н.А.Денисова, С.А.Степанова. Обратная задача восстановления диэлектрической проницаемости с разрывным профилем, ЖВММФ, 1999, т. 39, №7, с. 1180-1187.
3. Б.И. Авдоченко, А.С. Задорин, В.А. Замотринский, А.А. Ильиных, и др. Восстановление диэлектрической проницаемости слоистой среды по частотной зависимости коэффициента отражения методом минимизации регуляризирующего функционала, Доклады ТУСУР, №1, 2007, с.5-8.