Применение теоремы об ограничении спектров дискретных сигналов на конечных интервалах к аэрокосмическим изображениям

Б.В. Костров

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Рязанский государственный радиотехнический университет», 390005, г. Рязань, ул. Гагарина, дом 59/1; E-mail kostrov.b.v@evm.rsreu.ru

Рассматривается проблема применения функций Виленкина-Крестенсона (ВКФ) для обработки аэрокосмических изображений. Приводятся примеры построения систем базисных функций на основе ВКФ с различными основаниями системы счисления и их применение.
The problem of applications functions Vilenkin-Krestenson to process aerospace images. Are some theorems underlying the methodology for applying transformations are built on data system functions.

В настоящее время теория дискретных сигналов, заданных на конечном множестве точек, является частью теории цифровой обработки сигналов. Любые линейные преобразования сигналов не должны при этом выходить за пределы интервала *N*, а сдвиг определяется как некоторая перестановка его отсчетов. Конечность интервала определения сигналов и соответствующее толкование сдвига приводит к необходимости выбора систем базисных функций для проведения спектрального анализа подобных сигналов. В результате этого теория сигналов на конечных интервалах приобретает своеобразие, поскольку сдвиг сигнала определяется как поразрядное сложение чисел по некоторому модулю. Такой подход к построению базисной системы приводит к системе функций, введенных Виленкиным и Крестенсоном, (ВКФ), которые занимают доминирующее положение в спектральном анализе сигналов на конечных интервалах. Выводы и положения этой теории находят широкое применение в технике связи, обработке изображений, антенной технике, спектроскопии, космической связи и распознавании образов.

Любая система ВКФ может быть представлена в виде квадратной ортогональной матрицы размером $N \times N$. При этом ВКФ будут периодическими функциями с рациональным периодом, заданным в некоторой m-ичной системе счисления, интервалом существования которых будет являться интервал $N = m^n$, где m и n целые числа.

Наиболее интересны для практической реализации являются два простейших случая. Первый при $n = 1$, когда матрица ВКФ представляет из себя матрицу дискретных экспоненциальных функций (def),

$$def(p,x) = \exp[j(2\pi / N)px] = \cos[(2\pi / N)px] + j\sin[(2\pi / N)px], \qquad (1)$$

где $p, x = 0,1,2,...,N-1$.

Число функций в ВКФ при $n = 1$ очевидно, равно числу отсчетов каждой функции N. Поэтому система def является полной, а ортогональность её не требует доказательства, так как она получена путем перехода от системы комплексных экспоненциальных функций, используемых в континуальном спектральном анализе для разложения сигналов на конечном интервале времени. Таким образом, можно говорить, что система ВКФ при $N = m$ дает основу для построения дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Второй простейший случай возникает при $m = 2$. При этом матрица def вырождается в матрицу Адамара и на основе системы ВКФ можно построить любую из систем функций ВКФ-Адамара, ВКФ-Пэли, ВКФ-Уолша, различия которых определяются методом упорядочивания функций в матрице Адамара. Основу всех трех систем составляют функции Уолша, важнейшим из свойств которых является то, что они могут использоваться для разложения произвольного сигнала, и поскольку принимают только два значения (1 и -1), оказываются удобными для вычислений на ЭВМ.

В общем случае ВКФ являются комплексными функциями, определенными выражением [1]

$$VKF(p,x)=\prod_{i=0}^{n-1} w^{<p_i x_i>}, \tag{2}$$

где $w=\exp[j(2\pi/m)]$, p_i и x_i значение коэффициентов в m- ичном представлении чисел p и x.

При $m=2$ $w=\exp[j\pi]=-1$ и ВКФ совпадает с функциями Уолша

$$VKF(p,x)=(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}<p_i x_i>} . \tag{3}$$

Как уже отмечалось выше, в другом крайнем случае при $n=1$ значения p и x не превосходят единственного разряда десятичного представления этих чисел и ВКФ переходят в def

$$VKF(p,x)=e^{j[(2\pi/N)]px]} . \tag{4}$$

С другой стороны ВКФ могут быть представлены через функции Радемахера - комплексные функции, заданные на том же интервале $N=m^n$:

$$R_i(x)=e^{j(2\pi/m)x_i} . \tag{5}$$

Тогда в соответствии с (2) ВКФ могут быть записаны как

$$VKF(p,x)=\prod_{i=0}^{n-1}[R_i(x)]^{<P_i>} . \tag{6}$$

Функции Радемахера являются особыми функциями в системе ВКФ. Так как m-ичное представление чисел p и x состоит из n разрядов, то система ВКФ содержит n обобщенных функций Радемахера. Поскольку переменная x принимает значения от 0 до $N-1$, то любой её разряд изменяется в пределах от 0 до $m-1$. Следовательно, функция Радемахера является периодической функцией с количеством периодов m^{i-1} на интервале N. Фаза функций Радемахера при увеличении x_i изменяется по линейному закону:

$$\Psi_i(x)=(2\pi/m)x_i . \tag{7}$$

В связи с этим функции Радемахера носят меандровый характер.

Для случая $m=2$ функции Радемахера могут быть заданы следующим образом

$r_i(x)=(-1)^{<x_i>}$,где $<x_i>$ - есть i -й разряд двоичного представления переменной x .

При таком задании все функции Радемахера являются действительными и нечетными на интервале N. Составленная из них система не является полной. Дополнение ее до полной приводит к системе функций Уолша

$$wal(w,x)=\prod_{i=1}^{n}[r_i(x)^{<w_i>}] ,$$

где $<w_i>$ значение i -го разряда номера функции Радемахера, представленного в коде Грея; $i=1,2,3,...,n$.

Если в номере функции Радемахера присутствует только одна единица, то функция Уолша совпадает с функцией Радемахера с соответствующим номером.

Таким образом, на интервале определения $N = 2^n$ систему функций Уолша можно разделить на n групп. При этом функция нулевого порядка не учитывается. Если эти группы обозначить номерами $k = 1,2,3,...,n$, то каждая группа начинается с функции Радемахера r_{n+1-k} и каждая группа включает в себя 2^{n-k} функций с учетом самой функции Радемахера. Таким образом система функций Радемахера создает своеобразный «каркас», на котором строится система Уолша, при этом неизбежно возникает идея использования данного факта при спектральном анализе сигналов.

Для понимания методологических основ применения данной системы можно выделить теорему об ограничении спектров сигналов, заданных на конечных интервалах.

<u>Теорема.</u> Если n порядок системы функций Радемахера и k - номер группы функций в системе Уолша, а ограничение спектра осуществляется на уровне функций Радемахера с номером $n+1-k$, то во вновь образованном изображении яркость полученных элементов $b_{ij}^{N_s}$ будет равна

$$b_{ij}^{N_s} = \frac{1}{S^2}\sum_{g=1}^{s}\sum_{p=1}^{s} b_{gp}, \quad \text{где } s = 2^{k-1},\ N_s = \frac{N}{S},\ ;\ i,j = \overline{1,N_s}. \tag{8}$$

Интуитивное использование данного свойства позволило построить двухуровневый алгоритм совмещения изображений, обладающий в десятки раз меньшими вычислительными затратами, чем алгоритмы, описанные в [2,3,4,5]. Пример реализации такого подхода описан в [6]. Доказательство данной теоремы в явном виде пока не найдено, поэтому приводимые далее рассуждения обладают в этом смысле определенной новизной.

Матрицу Адамара для системы Уолша – ВКФ при произвольном $N = 2^n$ можно задать непосредственно с помощью простого мнемонического правила, подобного описанному в [1] для ВКФ – Пэли.

Для $N = 2$ элементарная матрица Адамара W_2 имеет один и тот же вид для любого способа упорядочивания

$W_2 = \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}$, где ‘+’ соответствует значению ‘1’, а ‘-‘ значению ‘-1’.

Для N=4 необходимо первую строку матрицы записать дважды, а затем к первой из них справа приписать те же элементы, а ко второй противоположные. Вторую строку также надо записать дважды и к первой из них справа записать противоположные элементы, а ко второй те же самые. Повторяя процедуру необходимое количество раз, можно построить матрицы W_4, W_8, W_{16}… Критерием инверсной или не инверсной записи правой части строки служит знакопеременность правого крайнего столбца. Для W_{16} система Уолша делится на n=4 групп. Каждая из них начинается с соответствующей функции Радемахера. $k = 1 - r_4$; $k = 2 - r_3$; $k = 3 - r_2$; $k = 4 - r_1$.

Анализируя структуры матриц и учитывая мнемоническое правило их образования можно сделать вывод, что ограничение спектра на уровне k=2, приведет к его усечению ровно в 2 раза, а значения элементов сигнала (одномерный случай) при таком усечении будут равны (для N=16).

$$b_0^8 = \frac{b_0^{16} + b_1^{16}}{2}; b_1^8 = \frac{b_2^{16} + b_3^{16}}{2}; ...; b_7^8 = \frac{b_{14}^{16} + b_{15}^{16}}{2} \tag{9}$$

или, в более общем виде:

$$b_0^{N/2} = \frac{b_0^N + b_1^N}{2}; b_1^{N/2} = \frac{b_2^N + b_3^N}{2}; ...; b_{(N-1)/2}^{N/2} = \frac{b_{N-2}^N + b_{N-1}^N}{2}. \quad (10)$$

Сворачивая выражение (10) можно получить:

$b_i^{N_s} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s} b_p$ где: $N_s = \frac{N}{S} = \frac{N}{2}$ определяет размер полученного сигнала;

$S = 2^{k-1} = 2$ определяет количество объединяемых элементов; $i \equiv 0,(N-1)/2$.

Окончательно обобщая для двумерного случая

$$b_{ij}^{N_s} = \frac{1}{S^2}\sum_{g=1}^{s}\sum_{p=1}^{s} b_{gp}, \text{ где } i = \overline{1, N/S} \text{ и } j = \overline{1, N/S}. \quad (11)$$

Исследование вопросов связанных с использованием ДЭФ для построения дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и применением функций Уолша для обработки изображений можно найти в [1,7,8]. Вопросам построения систем базисных функций, занимающих промежуточное место между дискретным преобразованием Уолша-Адамара (ДПУ) и ДПФ до последнего времени практически не уделялось внимание, в виду отсутствия простых рекомендаций по их применению. С другой стороны, очевидно, что исследовать все варианты построения базисов на основе ВКФ, вряд ли возможно. В этой ситуации наиболее рациональным представляется исследование тех вариантов построения, которые можно легко сопоставить с наиболее экономичным вариантом при $m = 2$, и в тоже время ненамного отличающихся от него по вычислительным затратам.

Наиболее сопоставимыми в этом плане будут выступать системы функций, основанные на арифметически кратной двоичной системе счисления ($m = 4$, $m = 8$ и т.д.). Тогда область определения таких базисов может быть задана как $N = (2^e)^n$, где $e = 2,3$ и т.д.

Такое задание области определения позволит легко сопоставлять полученные результаты и легко переходить от одной арифметической операции к другой.

Рассмотрим построение системы базисных функций на основе ВКФ с основанием системы счисления $m = 4$. Для простоты понимания формирования системы базисных функций примем $n = 2$. Исходная матрица ДЭФ имеет вид:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} w_0 & w_0 & w_0 & w_0 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_0 & w_2 & w_4 & w_6 \\ w_0 & w_3 & w_6 & w_9 \end{pmatrix}, \text{ где } w = e^{j\frac{2\pi}{m}} = e^{j\frac{2\pi}{4}}. \quad (12)$$

Матрица вновь создаваемой системы есть n-я кронекеровская степень матрицы ДЭФ размером 4x4. Искомая матрица будет иметь размерность 16x16

$\mathbf{VKF}_{4^2} = \mathbf{D}_4^{(2)}$, где (2) означает вторую кронекеровскую степень матрицы **D**.

Полученная матрица является симметрической, т.е. ее свойства одинаковы по переменным p и x. Данное свойство позволяет использовать данное преобразование в прямом и обратном направлениях, не выполняя операции транспонирования матриц

$\mathbf{C_m} = \mathbf{VKF_{16}} \mathbf{B} \, \mathbf{VKF_{16}}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{VKF_{16}} \mathbf{C_m} \mathbf{VKF_{16}}$,где $\mathbf{C_m}$ - матрица коэффициентов в m-ичном спектральном представлении, $\mathbf{B}$ - матрица изображения.

Аналогично рассмотренному примеру можно построить систему ВКФ с любой областью определения N. Принимая во внимание соображения, высказанные в (2) был построен базис для m=4 и n=4, N=256.

Наиболее просто понять работу данной теоремы на примере ограничения спектра изображения. Суть поведенного эксперимента состоит в следующем: при ограничении спектра изображения в s раз примерно во столько же раз должно ухудшиться его разрешение. В случае замены отброшенных спектральных составляющих нулями, при восстановлении изображения из спектрального пространства, это приведет к образованию укрупненных пикселей размером sxs элементов с усредненной яркостью. Сравнить два полученных результата можно путем попиксельного вычитания одного изображения из другого или путем нахождения среднеквадратического отклонения всех пикселей двух изображений. Результаты такого сравнения приводятся в таблице 1.

Таблица 1. Сравнительные характеристики применения теоремы об ограничении спектра аэрокосмических изображений для различных базисов

Основание системы счисления	m=2	m=4	m=m
Количество отличающихся пикселей	0	122	161
Среднеквадратичное отклонение (СКО)	0	0,1654	7,0542
Время выполнения 256*256 (с)	0,0151	0,0286	0,0482
Время выполнения 64*64 (с)	0,0016	0,0038	0,0071

Литература

1. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.
2. Злобин В.К., Колесенков А.Н., Костров Б.В. Корреляционно-экстремальные методы совмещения аэрокосмических изображений // Вестник Рязанского государственного радиоуниверситета № 3 (Вып. 37). – Рязань, 2011. – С. 12-17.
3. Костров Б.В. Корреляционно-экстремальный метод обнаружения цифровых сигналов// Цифровая обработка сигналов, №2, 2011. С.46-51.
4. Колесенков А.Н., Костров Б.В., Саблина В.А. Применение вещественно-диадной свертки для идентификации аэрокосмических изображений//В мире научных открытий №1 (13) 2011. Серия «Математика. Механика. Информатика». С.122-127.
5. Колесенков А.Н., Костров Б.В. Метод прореживания базисных функций в корреляционно-экстремальных алгоритмах // Вопросы радиоэлектроники. Сер.ОТ, 2010, вып.1. – С. 176-184.
6. Колесенков А.Н., Костров Б.В. Технология повышения производительности корреляционных алгоритмов совмещения для информационной системы космического мониторинга// Научное творчество XXI века: Материалы IV Всерос.НПК с международным участием. Приложение к журналу «В мире научных открытий».- Красноярск, 2011. –Вып.2.- С.80-82.
7. Костров Б.В., Костров В.В., Саблина В.А. Алгоритм восстановления изображений с периодическими низкочастотными искажениями//Радиотехника №11. 2009. С.92-95.
8. Костров Б.В., Саблина В.А. Адаптивная фильтрация изображений со структурными искажениями// Цифровая обработка сигналов, №4. – С. 49-53.