

Теория волновых катастроф в задачах излучения, распространения и фокусировки широкополосных радиосигналов

Крюковский А.С.¹, Лукин Д.С.², Растягаев Д.В.³

¹ Российский новый университет (kryukovsky@rambler.ru)

² Московский физико-технический институт (luknet1@yandex.ru)

³ Российский новый университет (rdv@rosnou.ru)

В работе представлены результаты математического моделирования структуры импульсов в областях совместной пространственно-временной фокусировки излучения типа катастроф в неоднородных средах. Исследованы амплитудные структуры импульсов в центрах пространственной фокусировки. Проведено исследование изменения амплитуды сигнала при прохождении частотно-модулированных импульсов в плазме через области фокусировок типа трехмерных катастроф. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 12-02-00413, 13-07-00937.

In work the results of mathematical modeling of structure of pulses are submitted in the regions of a joint space-time focusings of radiation such as catastrophes in non-uniform media. The amplitude structures of the pulses in the centers of the space focusings are investigated. The research of changes of signal amplitudes at passage of frequency – modulated pulses in plasma through areas of focusings such as three-dimensional catastrophes is carried out. Supported by RFBR, grants № 12-02-00413, 13-07-00937.

При моделировании процессов излучения, распространения, рассеяния и дифракции радиоизлучения применяется ряд традиционных методов. В первую очередь это методы геометрической оптики, физической оптики, геометрической теории дифракции, физической теории дифракции, а также метод параболического уравнения, метод интерференционного интеграла, метод суммирования гауссовых пучков и другие [1,2]. Отличительной особенностью указанных методов является асимптотический подход. Они применимы тогда, когда характерные размеры задачи (масштаб неоднородности среды распространения, радиус кривизны кромки тела и др.) много меньше длины волны. Корректное применение асимптотических методов позволяет в некоторых случаях ослабить это требование и использовать асимптотики даже тогда, когда длина волны только в 2...3 раза меньше характерного размера задачи.

Лучевые методы становятся неприменимыми и в областях, близких к огибающим лучевых семейств — каустикам и их особенностям, при приближении к которым амплитудные коэффициенты разложения стремятся к бесконечности. Кроме того, известно, что при построении решения задачи в окрестности каустики при переходе через неё меняется тип решения [1,2].

В отличие от традиционных асимптотических методов, волновая теория катастроф [2-7] позволяет проанализировать такие особенности дифракционной структуры радиоизлучения, которые либо вообще не могут быть описаны традиционными асимптотическими методами, либо описание которых крайне затруднено из-за значительных вычислительных затрат. Теория волновых катастроф идеологически наиболее тесно связанная с методом канонического оператора Маслова и теорией дифференцируемых отображений. Математические особенности гладких отображений, или катастрофы, соответствуют устойчивым областям фокусировки (устойчивым по отношению к малым возмущениям связанных с ними лучевых семейств). По существу, именно области структурно-устойчивых фокусировок электромагнитных (ЭМ) полей определяют общую дифракционную структуру поля.

В практических задачах такие особенности играют двоякую роль. С одной стороны, корректная интерпретация дифракционной структуры поля в этих областях позволяет

правильно представить форму рассеивающего объекта и существенно повысить эффективность радиолокационных систем, в несколько раз увеличить эффективность фокусировки излучения в плазме при формировании направленных пучков. С другой стороны, те же эффекты могут маскировать изучаемые объекты, разрушать процесс формирования фокальных областей, нарушать работоспособность каналов ЭМ связи.

Существуют четыре типичных задачи, связанные с каустическими особенностями, а также с пространственными и временными границами сигнала. Это распространение радиоволн в неоднородных средах; фокусировка в оптических и антенных системах; дифракция ЭМ полей на проводящих и диэлектрических телах со сложными границами; дифракция и распространение радио и видео импульсов в плазме.

В зависимости от ограничений задачи (связанных, например, с границами области распространения или временными границами импульса) возникают основные, краевые, угловые и обобщенные краевые катастрофы [4,5,8]. Типовые примеры задач, соответствующие разным классам волновых катастроф, приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Типы катастроф	Классы физических задач	Типы каустик
Основные катастрофы	Распространение и фокусировка ЭМ и акустических волн как в однородных, так и в неоднородных средах	Неограниченные каустики и их особенности: 1. одномерные: клюв, ласточкин хвост, бабочка и др.; 2. двумерные: омбилики; 3. трехмерные.
Краевые катастрофы	Дифракция на телах с острыми гладкими границами. Распространение импульсов в диспергирующих средах	Каустические поверхности с ограничением и их особенности совместно с неограниченными (особыми) каустиками вторичного краевого лучевого семейства.
Угловые катастрофы	Дифракция на телах с острыми границами с угловыми точками и на телах с гладкими границами в диспергирующих средах	Каустические поверхности с ограничением и их особенности совместно с ограниченными (особыми) каустиками двух вторичных краевых лучевых семейств и неограниченным вторичным угловым лучевым семейством.

Применение волновой теории катастроф к моделированию процессов распространения нестационарных сигналов позволяет провести классификацию пространственно-временных эталонных структур, возникающих при совместной фокусировке первичных и вторичных (дифракционных) лучевых семейств различных типов, при дифракции нестационарного излучения на телах с гладкими кромками в неоднородных, диспергирующих средах. Такие фокусировки при выполнении определенных условий могут соответствовать трехмерным катастрофам высокой кратности и модальности [7,9].

При рассмотрении задач дифракции и распространения ЭМ волн существуют различные интегральные методы, позволяющие получить в виде осциллирующего интеграла равномерные асимптотические решения:

$$U(\Lambda; x) \cong \Lambda^{\delta/2} \int_G f(\Lambda; \eta, x) \cdot \exp(i \Lambda \Phi(\eta, x)) d\eta, \quad \delta = \dim \eta, \quad (1)$$

применимые в более широкой области, как на каустических поверхностях, так и в их окрестностях.

Наиболее общим из них является канонический оператор В.П. Маслова (КОМ) [3,10,11]. Не вдаваясь в подробности построения решений типа (1), отметим, что амплитуда интегранты имеет вид асимптотически сходящегося ряда:

$$f(\Lambda; \eta, x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(i\Lambda)^j} f^{(j)}(\eta, x), \quad (2)$$

причем для функций $\Phi(\eta, x)$ и $f^{(j)}(\eta, x)$, $j = 1, 2, \dots$, как и в случае лучевых решений, можно получить рекуррентную цепочку из дифференциальных уравнений первого порядка. Как правило, в интегральных методах амплитуда интегранты определяется на компактном носителе, что позволяет считать интегралы (1), сходящимися.

Интегральная форма асимптотического решения задачи часто не является окончательной, поскольку, во-первых, многократные быстро осциллирующие интегралы с трудом поддаются вычислению, а во-вторых, возможен их дальнейший анализ и переход к эталонным равномерным асимптотическим решениям, связанным с особенностями каустических поверхностей. Можно определить соответствие между особенностями каустических поверхностей и особенностям дифференцируемых отображений (катастрофами). Такие особенности подробно классифицированы в работах [12-14].

На основе классификации волновых катастроф равномерное асимптотическое решение вида (1) может быть представлено в виде разложения по конечному набору специальных функций волновых катастроф (СВК) и их первых производных с коэффициентами в виде асимптотически сходящихся рядов, причем от типа особенности зависит вид «главной» СВК (основной СВК). Тип вырождения обобщенного эйконала $\Phi(\eta, x)$ соответствует определенному типу каустической особенности Σ , а она в свою очередь определенному типу дифракционной структуры волнового поля. Поэтому поле в окрестности каустической особенности оказывается «пропорциональным» специальной функции волновой катастрофы (СВК) вида:

$$I^\Sigma(\lambda, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i F_\Sigma(\xi, a, \lambda)) d\xi, \quad (3)$$

где F_Σ – универсальная деформация основной катастрофы типа Σ .

Таким образом, в окрестности каустической особенности реально наблюдаемая структура поля оказывается подобной некоторой эталонной.

Рассмотрим процесс распространения сигнала в некоторый момент времени сформировавшего начальный фронт Ω (рис.1), в диспергирующей среде (например, ионосферной плазме) без поглощения. Для амплитуды поля будет справедливо уравнение Клейна-Гордона.

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\omega_{nl}^2}{c^2} U. \quad (4)$$

Асимптотическое решение может быть представлено в виде четырехкратного осциллирующего интеграла [9,15]:

$$U(t; \vec{r}) \cong \iint_G d\xi_1 d\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{\eta_a}^{\eta_b} f(\xi_1, \xi_2, \omega, \eta; t, \vec{r}) \times \exp[i\Lambda\Phi(\xi_1, \xi_2, \omega, \eta; t, \vec{r})] d\eta, \quad (5)$$

где Λ — большой параметр задачи,

t, \vec{r} — пространственные и временные координаты точки наблюдения,

ξ_1 и ξ_2 — пространственные параметры парциальной волны,

ω — частота излучения,

η — начальное время.

Здесь G — задает поверхность начального волнового фронта (рис. 1).

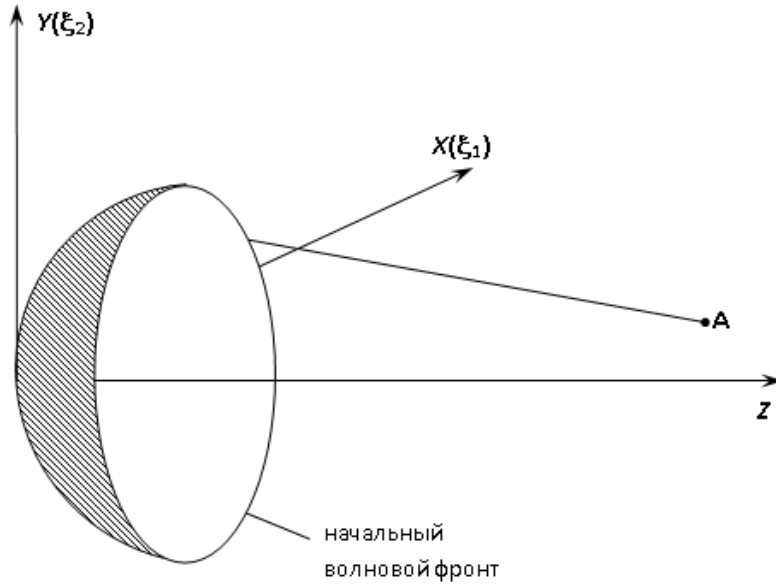


Рис. 1. Геометрия задачи

Для примера, рассмотрим распространение частотно-модулированного сигнала в однородной плазме, причем уравнение (4) дополним следующим граничными условиями:

$$U(\vec{r}, t)|_{r_3=f(r_1, r_2)} = U_0(t) = A(r_1, r_2) \exp\{i\beta(t)\}. \quad (6)$$

Здесь функция $\beta(t)$ описывает частотную модуляцию радиоимпульса, а функция $A(r_1, r_2)$ — амплитудно-распределение на начальном фазовом фронте, заданном уравнением $r_3 = f(r_1, r_2)$.

Если спектральная компонента волнового поля в однородной плазме с поглощением удовлетворяет волновому уравнению, то выражение для спектральной компоненты имеет вид:

$$\tilde{U}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\vec{r}, \eta) \exp(-i\omega\eta) d\eta. \quad (7)$$

Рассмотрим плазменный слой с комплексной эффективной диэлектрической проницаемостью [16]:

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\nu} = \varepsilon(\omega) - i\psi(\omega). \quad (8)$$

В формуле (8) разделены вещественная и мнимые части, введены функции

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}, \quad \psi(\omega) = \frac{\nu \omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \nu^2)}. \quad (9)$$

Параметр ω_p — плазменная частота.

Асимптотическое решение данной задачи представляет собой трехкратный (для двухмерной задачи) или четырехкратный (для трехмерной задачи) интеграл по параметрам начального волнового фронта ξ_1 (и ξ_2), частоте ω и начальному времени η выхода излучения.

Для двухмерного случая выражение имеет вид:

$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{c}(2\pi)^{3/2}} \iiint \frac{\sqrt{|\omega|} \hat{\varepsilon}^{1/4} e^{-\delta+i(\pi/4)\text{sign}\omega}}{\sqrt{R}} A(\xi_1; \eta) \sqrt{1+f_{\xi_1}'^2} \exp(i\Phi) d\xi_1 d\eta d\omega, \quad (10_1)$$

а в трехмерном случае:

$$U(\vec{r}, t) = \frac{i}{c(2\pi)^2} \iiint \frac{\omega \sqrt{\hat{\varepsilon}}}{R} e^{-\delta} A(\xi_1, \xi_2; \eta) \sqrt{1+f_{\xi_1}'^2 + f_{\xi_2}'^2} \exp(i\Phi) d\xi_1 d\xi_2 d\eta d\omega. \quad (10_2)$$

Фаза интеграла может быть представлена как

$$\Phi = \omega \cdot \left(t - \eta - \frac{R}{c} \cdot \sqrt{\frac{\mu + \varepsilon}{2}} \right) + \beta(\eta). \quad (11)$$

Величина δ описывает затухание в среде, связанное с поглощением:

$$\delta = R \frac{|\omega|}{c} \sqrt{\frac{\mu - \varepsilon}{2}}. \quad (12)$$

Проанализируем асимптотику интеграла (5). Для этого, в рамках волновой теории катастроф, исследуем особые точки интеграла, которые в общем случае определяются как решения системы четырех уравнений:

$$\partial\Phi/\partial\xi_1 = 0, \quad \partial\Phi/\partial\xi_2 = 0, \quad \partial\Phi/\partial\omega = 0 \quad \partial\Phi/\partial\eta = 0. \quad (13)$$

В условиях рассматриваемого нами частного случая уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_j} &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\mu + \varepsilon}{2}} R'_{\xi_j} = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\mu + \varepsilon}{2}} \cdot \frac{\xi_j - r_j + (f - z) \cdot f'_{\xi_j}}{R} = 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\omega} &= t - \eta - \frac{R}{c} Q = 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} &= -\omega + \beta'_\eta = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь введена величина Q :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\mu + \varepsilon} + \frac{\omega}{2} \frac{\mu'_\omega + \varepsilon'_\omega}{\sqrt{\mu + \varepsilon}} \right). \quad (15)$$

Согласно волновой теории катастроф, для исследования типа фокусировки излучения необходимо рассмотреть матрицу Гесса фазовой функции по переменным ω и η :

$$H_t = \begin{vmatrix} -\frac{R}{c} Q'_\omega & -1 \\ -1 & \beta''_{\eta\eta} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

В формуле (16) введены обозначения:

$$\begin{aligned} Q'_\omega &= \frac{4(\mu'_\omega + \varepsilon'_\omega)(\mu + \varepsilon) + 2\omega(\mu + \varepsilon)(\mu''_{\omega\omega} + \varepsilon''_{\omega\omega}) - \omega(\mu'_\omega + \varepsilon'_\omega)^2}{4\sqrt{2}(\mu + \varepsilon)^{3/2}}, \\ \varepsilon''_{\omega\omega} &= \frac{2\omega_p^2(v^2 - 3\omega^2)}{(\omega^2 + v^2)^3}, & \psi''_{\omega\omega} &= \frac{2v\omega_p^2(v^4 + 3\omega^2v^2 + 6\omega^4)}{\omega^3(\omega^2 + v^2)^3}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mu''_{\omega\omega} = \frac{(\varepsilon'_\omega)^2 + (\psi'_\omega)^2 + \varepsilon\varepsilon''_{\omega\omega} + \psi\psi''_{\omega\omega} - (\mu'_\omega)^2}{\mu}.$$

Анализ матрицы Гесса (16) показывает, что двумерная фокусировка невозможна, так как ранг матрицы не меньше 1. Поэтому к интегралам (10₁) и (10₂) применим метод стационарной фазы, например по частоте ω .

Предполагая, что ограничения по частоте отсутствуют, из уравнения (11) найдем стационарные точки ω_{\pm} , которые для слабо поглощающей среды ($\nu \rightarrow 0$) переходят в следующие выражения:

$$\omega_{\pm} = \pm \tilde{\omega} \rightarrow \pm \omega_p \left(1 - \frac{R^2}{c^2(t-\eta)^2} \right)^{-1/2} = \pm \frac{c\omega_p |t-\eta|}{\sqrt{c^2(t-\eta)^2 - R^2}}. \quad (18)$$

При $\nu \neq 0$ уравнение (11) имеет несколько решений. На рис. 2 показана зависимость положительной частоты $\tilde{\omega}$ от эффективной частоты соударений ν при $c=3 \times 10^8$ м, $\omega_p = 2\pi \times 10^7$ с⁻¹, $\eta=0$, $R=600$ м, $t=3 \times 10^{-6}$ с.

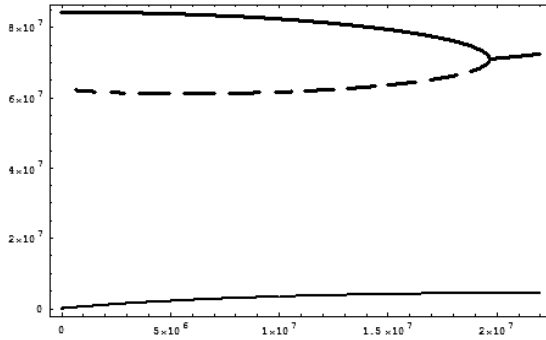


Рис. 2.

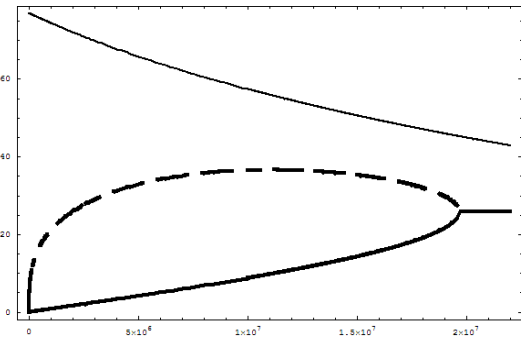


Рис. 3.

Из рисунка видна бифуркация числа решений. При $\nu < 2 \times 10^7$ с⁻¹ существует три решения: верхнее, близкое к частоте в отсутствие поглощения, среднее, близко к плазменной частоте, и нижнее решение, начинающееся из нуля и во много раз меньшее двух первых решений. При более высоких частотах ($\nu > 2 \times 10^7$ с⁻¹ – такая высокая эффективная частота соударений обычно не характерна для ионосферной плазмы), два верхних решения сливаются (они сливаются и при $\nu=0$), и возникает пара комплексно сопряженных решений, действительная часть которых показана на рисунке. Однако все три решения вносят разный вклад в асимптотику.

На рис. 3 показана зависимость параметра δ от эффективной частоты соударений ν . Видно, что наименьшее поглощение соответствуют максимальной частоте (жирная сплошная линия). Вклад третьей частоты (сплошная тонкая линия) в асимптотику ничтожен. Что же касается второй частоты (пунктир), то она возникает как следствие модели задачи: разделения в фазе действительной и мнимой части и переноса последней в амплитуду.

При дальнейшем рассмотрении мы ограничимся только главной парой седловых точек, отбрасывая второе и третье решение.

В итоге равномерная асимптотика может быть представлена в виде суммы двух интегралов:

$$U(\vec{r}, t) = W_+(\vec{r}, t) - W_-(\vec{r}, t). \quad (19)$$

Для двумерного случая интегралы в правой части выражения (19) имеют вид:

$$W_{\pm}(\vec{r}, t) \cong \frac{i}{2\pi} \iint e^{-\tilde{\delta}} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{|\tilde{\omega}|}{|Q'_\omega(\tilde{\omega})|}} \hat{\varepsilon}^{1/4}(\tilde{\omega}) \cdot A(\xi_1; \eta) \exp\{i[\beta(\eta) \pm \varphi]\} \times \sqrt{1 + f_{\xi_1}^{\prime 2}} d\xi_1 d\eta, \quad (20)$$

а для трехмерной задачи:

$$W_{\pm}(\vec{r}, t) \cong \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 c}} \iiint e^{-\tilde{\delta}} A(\xi_1, \xi_2; \eta) \exp\{i[\beta(\eta) \pm (\varphi + \pi/4)]\} \times \\ \times \sqrt{1 + f_{\xi_1}'^2 + f_{\xi_2}'^2} \frac{\sqrt{\varepsilon(\tilde{\omega})} \tilde{\omega}}{R^{3/2} \sqrt{|Q'(\tilde{\omega})|}} d\xi_1 d\xi_2 d\eta. \quad (21)$$

В формулах (20–21) введены обозначения:

$$\varphi(\vec{r}, t; \eta) = \tilde{\omega} \cdot \left(t - \eta - \frac{R}{c} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon}}{2}} \right), \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon(\tilde{\omega}), \quad \tilde{\mu} = \mu(\tilde{\omega}), \quad \tilde{\delta} = \delta(\tilde{\omega}). \quad (22)$$

Из анализа матрицы Гесса (16) следует, что временная фокусировка видеоимпульса имеет место только в том случае, когда выполняется условие

$$\beta_{\eta\eta}'' = -\frac{c}{R} \frac{1}{Q'_{\omega}(\tilde{\omega})}. \quad (23)$$

В частном случае среды без поглощения, то есть когда $\nu = 0$, $\mu = \varepsilon$, асимптотика поля (19) может быть представлена в виде интегралов (20), либо (21).

В двумерном случае получаем

$$W_{\pm}(\vec{r}, t) \cong \frac{i}{\omega_p 2\pi} \iint A(\xi_1; \eta) \exp\{i[\beta(\eta) \pm \varphi]\} \times \sqrt{1 + f_{\xi_1}'^2} \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\omega}^2}{R} d\xi_1 d\eta, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon(\tilde{\omega}). \quad (24)$$

Тогда $\varphi(\vec{r}, t; \eta) = \omega_p \sqrt{(t - \eta)^2 - R^2/c^2}$.

В трехмерной задаче

$$W_{\pm}(\vec{r}, t) \cong \frac{i}{\omega_p \sqrt{(2\pi)^3 c}} \iiint A(\xi_1, \xi_2; \eta) \exp\{i[\beta(\eta) \pm \varphi]\} \times \\ \times \sqrt{1 + f_{\xi_1}'^2 + f_{\xi_2}'^2} \frac{\tilde{\varepsilon}^{5/4} \tilde{\omega}^{5/2}}{R^{3/2}} d\xi_1 d\xi_2 d\eta. \quad (25)$$

Тогда величина $\varphi(\vec{r}, t; \eta) = \omega_p \sqrt{(t - \eta)^2 - R^2/c^2} + \pi/4$.

Фокусировка видеоимпульса во времени имеет место в случае, если выполняется следующее условие:

$$\beta_{\eta\eta}'' = \frac{c}{R} \frac{\tilde{\omega}^3}{\omega_p^2} \tilde{\varepsilon}^{3/2}, \quad (26)$$

что для положительных частот возможно лишь в случае, когда модуляция сигнала $\beta(\eta)$ задается возрастающей, выпуклой вниз функцией.

Рассмотрим задачу в случае, когда частотная модуляция импульса отсутствует, т.е. $\beta(\eta) = 0$, и форма начального видеоимпульса во времени на начальном волновом фронте целиком определяется «медленно меняющейся» амплитудной функцией $A(\xi_1; \eta)$ (в двумерном случае) или (в трехмерном случае) $A(\xi_1, \xi_2; \eta)$ с явно выраженными началом и концом видеоимпульса при $\eta = \eta_a$ и $\eta = \eta_b$ соответственно.

Пусть видеоимпульс задается некоторой ступенчатой функцией, отличной от нуля на заданном временном интервале, — $A(\xi_1; \eta) = A_s(\xi_1)$ (или $A(\xi_1, \xi_2; \eta) = A_s(\xi_1, \xi_2)$), если $\eta \in [\eta_a, \eta_b]$ и $A(\xi_1; \eta) = 0$ ($A(\xi_1, \xi_2; \eta) = 0$), если $\eta \notin [\eta_a, \eta_b]$. Тогда можно упростить интегральное решение (17) или (18), проведя анализ его критических точек уже по переменной η . В рамках волновой теории катастроф [15] к числу таких критических точек относятся седловая (стационарная) точка фазовой функции φ , а также пределы области интегрирования η_a и η_b .

Седловая точка интегралов определяется из равенства нулю производных фазовой функции интегранты. В случае среды с поглощением для выяснения вклада седловой точки целесообразно выполнить дифференцирование непосредственно фазы Ψ по переменным ω и η , и приравнять производные нулю. При конечном значении эффективной частоты соударений¹ ν такая точка отсутствует (из уравнения $\partial\Psi/\partial\eta=0$ следует, что $\omega=0$, а производная $\partial\Psi/\partial\omega$ при этом обращается в бесконечность).

Для среды без поглощения седловая точка интегралов (24) или (25) определяется из равенства нулю производной фазы интегранты φ по η :

$$\varphi'_\eta = \frac{(\eta-t)\omega_p}{\sqrt{(\eta-t)^2 - R^2/c^2}} = 0,$$

откуда следует, что $\eta = t$, $\tilde{\omega} = 0$, а сам вклад пропорционален экспоненте с отрицательным показателем, стоящей под знаком двукратного интеграла: $\exp(-R\omega_p/c)$.

Вкладом данной седловой точки можно пренебречь при выполнении следующего условия $-R \gg \lambda_p/2\pi$, где λ_p – длина волны, соответствующая плазменной частоте. Далее будем считать, что указанное условие выполняется. Отсюда следует, что для сред с поглощением и без поглощения основной вклад в асимптотику решения определяется краевыми точками начала и конца импульса.

Рассмотрим вклад в асимптотику решения временных краевых лучей, соответствующих началу и концу видеоимпульса. Выполним в интегралах (20) и (21) интегрирование по частям и, для простоты, ограничимся только главным членом асимптотики.

Считая, что $\beta(\eta) \neq 0$ получим следующие выражения (для двух- и трехмерного случая соответственно):

$$W_\pm(\vec{r}, t) \cong \frac{\exp[i\beta(\eta_0)]}{2\pi} \int e^{-\tilde{\delta}} A(\xi_1; \eta_0) \exp\{i[\pm\varphi]\} \times \sqrt{1+f_{\xi_1}^2} \frac{\varepsilon^{1/4}(\tilde{\omega}) \cdot \sqrt{|\tilde{\omega}|}}{R\sqrt{|Q'_\omega|}(\beta'_\eta \pm \varphi'_\eta)} d\xi_1 \quad (27)$$

или

$$W_\pm(\vec{r}, t) \cong \frac{\exp[i\beta(\eta_0)]}{\sqrt{(2\pi)^3 c}} \iint e^{-\tilde{\delta}} A(\xi_1, \xi_2; \eta_0) \exp\{i[\pm(\varphi + \pi/4)]\} \times \\ \times \sqrt{1+f_{\xi_1}^2 + f_{\xi_2}^2} \frac{\sqrt{\varepsilon(\tilde{\omega})} \cdot \tilde{\omega}}{R^{3/2} \sqrt{|Q'_\omega|}(\beta'_\eta \pm \varphi'_\eta)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (28)$$

В выражениях (27) и (28) вместо переменной η подставлено значение η_0 , равное либо η_a , либо η_b (слагаемое вносит вклад при выполнении условия $t > R/c + \eta_0$).

Просуммировав полученные результаты в случае $\beta(\eta) = 0$ для среды с поглощением, для двумерной задачи находим, что

$$U(\vec{r}, t) \cong \frac{1}{\pi} \int \frac{\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}}{R} \left[e^{-\tilde{\delta}} A(\xi_1; \eta) \varepsilon^{1/4}(\tilde{\omega}) \cdot \sqrt{|\tilde{\omega}|} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{|Q'_\omega|} \varphi'_\eta} \right]_a^b d\xi_1, \quad (29)$$

а для трехмерной задачи:

¹При малых частотах эффективную частоту соударений в плазме нельзя рассматривать, независимой от частоты, но асимптотический анализ интегралов в настоящей работе проводится в рамках приближенной модели.

$$U(\vec{r}, t) \cong \frac{2}{\sqrt{(2\pi)^3 c}} \iint \frac{\sqrt{1+f_{\xi_1}^2+f_{\xi_2}^2}}{R^{3/2}} \left[e^{-\delta} A(\xi_1, \xi_2; \eta) \sqrt{\varepsilon(\tilde{\omega})} \tilde{\omega} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{|Q'_\omega| \phi'_\eta}} \right]_a^b d\xi_1 d\xi_2. \quad (30)$$

В отсутствие поглощения выражения (29) и (30) соответственно упрощаются:

$$U(\vec{r}, t) \cong \frac{1}{\pi\omega_p} \int \frac{\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}}{R} \left[A(\xi_1; \eta) \tilde{\varepsilon} \tilde{\omega}^2 \frac{\cos(\varphi)}{\phi'_\eta} \right]_a^b d\xi_1, \quad (31)$$

или

$$U(\vec{r}, t) \cong \frac{2}{\omega_p \sqrt{(2\pi)^3 c}} \iint \frac{\sqrt{1+f_{\xi_1}^2+f_{\xi_2}^2}}{R^{3/2}} \left[A(\xi_1, \xi_2; \eta) \tilde{\varepsilon}^{5/4} \tilde{\omega}^{5/2} \frac{\cos(\varphi)}{\phi'_\eta} \right]_a^b d\xi_1 d\xi_2. \quad (32)$$

На основе проведенного исследования, можно утверждать, что фокусировка прямоугольного видеоимпульса в однородной плазме будет определяться пространственной фокусировкой, соответствующей одномерной фокусировке каспоидной серии A_N и двумерным фокусировкам — сериям коранга 2. Двумерные фокусировки возможны только для трёхмерного случая.

Одномерная фокусировка возникает в случае, когда $R''_{\xi_1 \xi_1} = 0$ (двумерный случай), либо когда коранг матрицы Гесса $\{R''_{ij}\}$ равен единице (трёхмерный случай).

Двумерная фокусировка возникает при условии, что все три различные компоненты матрицы Гесса обращаются в нуль.

При выполнении определенных условий краевой временной луч, соответствующий начальному времени выхода η_a , оказывается вблизи точки трехмерной фокусировки пространственно-временных лучей, что приводит к образованию краевой катастрофы коранга три.

В соответствии с теорией краевых катастроф в окрестности конечно определенной особой седловой точки существует невырожденное преобразование:

$$\xi_1 = \Pi_1(\vec{p}; \vec{r}, t) \quad \xi_2 = \Pi_2(\vec{p}; \vec{r}, t) \quad \eta = \eta_a + z \cdot \Pi_3(\vec{p}; \vec{r}, t) \quad (33)$$

такое, что фазовая функция может быть приведена к полиному стандартного типа:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\xi_1, \xi_2, \eta; \vec{r}, t) &= F_\Sigma(x, y, z; \vec{a}, \vec{\lambda}) + \theta \\ \tilde{\Phi}(\xi_1, \xi_2, \eta_a; \vec{r}, t) &= F_\Sigma(x, y, 0; \vec{a}, \vec{\lambda}) + \theta. \end{aligned} \quad (34)$$

Такой вид преобразований в волновой теории катастроф соответствует краевым катастрофам. В качестве края выступает начало импульса. Классификация, свойства и условия образования краевых катастроф рассматривались в работах [2,4,17].

В нашем случае возможно образование краевых катастроф определенного типа, поскольку временная координата является одномерной и, следовательно, при сужении на временную ось возможно образование только каспоидной серии.

В таблице 2 приведена начальная классификация краевых катастроф, с распадающимися пространственными и временными частями, для которых справедливо равенство:

$$N_\Sigma = N_g + N_e = N_r \times (N_t + 1). \quad (35)$$

Здесь N_t — кратность временной фокусировки, aN_r — кратность пространственной фокусировки.

В таблице приведен список краевых трехмерных катастроф коранга 3 [7]. Перечислены следующие характеристики: типы краевых особенностей — (Σ_g, Σ_E) , соответствующие данным типам фокусировки, временная Σ_t и пространственная Σ_r катастрофы, коразмерность катастрофы — L , её модальность — M , а также значения

особости для краевых пространственно-временных краевых фокусировок различных типов. Фокусировка волнового поля в точке волновой катастрофы характеризуется особостью σ_1 — показателем степени большого параметра задачи Λ , которому пропорционально значение поля в фокусе системы.

Таблица 2.

Символ (Σ_g, Σ_E)	Σ_r	Σ_t	Нормальная форма $\varphi_0^\Sigma(x, y, z, \vec{a})$.	L	M	σ
(D_4, D_4)	D_4	A_1	$x^3 + y^3 + z^2 + axyz$	6	1	$\frac{1}{3}$
(P_8, D_4)	D_4	A_2	$x^3 + y^3 + z^3 + a_1xyz + a_2xz^2 + a_3yz^2 + a_4xyz^2$	7	4	$\frac{1}{2}$
(U_{12}, E_6)	E_6	A_2	$x^4 + y^3 + z^3 + a_1yz^2 + a_2x^2z^2 + a_3x^2yz + a_4xyz^2 + a_5x^2yz^2$	12	5	$\frac{7}{12}$
$(U_{1,0}, E_7)$	E_7	A_2	$x^3 + xy^3 + z^3 + a_1xz^2 + a_2xz^2 + a_3x^2yz + a_4x^2z^2 + a_5xyz^2 + a_6y^2z^2 + a_7x^2yz^2$	13	7	$\frac{11}{18}$
(U_{16}, E_8)	E_8	A_2	$x^3 + y^5 + z^3 + a_1xz^2 + a_2xy^2z + a_3xyz^2 + a_4y^2z^2 + a_5xy^3z + a_6xy^2z^2 + a_7y^3z^2 + a_8xy^3z^2$	15	8	$\frac{19}{30}$
(U_{4n-4}, D_4) $n=3m$	D_4	A_{n-1}	$x^3 + y^3 + z^n + a_1xyz^m + \dots + a_{n-m}xyz^{n-1} + b_1xz^{2m} + \dots + b_{n-2m}xz^{n-1} + c_1yz^{2m} + \dots + c_{n-2m}yz^{n-1}$	$8m-1$	$4m$	$\frac{5}{6} - \frac{1}{n}$
(U_{4n-4}, D_4) $n=3m+1$	D_4	A_{n-1}	$x^3 + y^3 + z^n + a_1xyz^{m+1} + \dots + a_{n-m-1}xyz^{n-1} + b_1xz^{2m+1} + \dots + b_{n-2m-1}xz^{n-1} + c_1yz^{2m+1} + \dots + c_{n-2m-1}yz^{n-1}$	$8m+3$	$4m$	$\frac{5}{6} - \frac{1}{n}$
(U_{4n-4}, D_4) $n=3m+2$	D_4	A_{n-1}	$x^3 + y^3 + z^n + a_1xyz^{m+1} + \dots + a_{n-m-1}xyz^{n-1} + b_1xz^{2m+2} + \dots + b_{n-2m-2}xz^{n-1} + c_1yz^{2m+2} + \dots + c_{n-2m-2}yz^{n-1}$	$8m+6$	$4m+1$	$\frac{5}{6} - \frac{1}{n}$
$(Q_{m,0}, D_{n+1})$ $n=3m$	D_{n+1}	A_2	$x^n + y^2x + z^3 + a_1yz^2 + a_2y^2z^2 + b_1zx^{2m} + \dots + b_{n-2m-1}zx^{n-2} + c_1z^2x^m + \dots + c_{n-m-1}z^2x^{n-2}$	$6m+2$	$3m$	$\frac{4m-1}{6m}$
(Q_{6m+4}, D_{n+1}) $n=3m+1$	D_{n+1}	A_2	$x^n + y^2x + z^3 + a_1yz^2 + a_2y^2z^2 + b_1zx^{2m+1} + \dots + b_{n-2m-2}zx^{n-2} + c_1z^2x^{m+1} + \dots + c_{n-m-2}z^2x^{n-2}$	$6m+5$	$3m$	$\frac{12m+1}{18m+6}$
(Q_{6m+6}, D_{n+1}) $n=3m+2$	D_{n+1}	A_2	$x^n + y^2x + z^3 + a_1yz^2 + a_2y^2z^2 + b_1zx^{2m+2} + \dots + b_{n-2m-3}zx^{n-2} + c_1z^2x^{m+1} + \dots + c_{n-m-2}z^2x^{n-2}$	$6m+7$	$3m+1$	$\frac{12m+5}{18m+12}$
(X_9, X_9)	X_9	A_1	$x^4 + y^4 + z^2 + a_1xyz + a_2x^2z + a_3y^2z + a_4x^2y^2 + a_5x^2yz + a_6xy^2z + a_7x^2y^2z$	10	7	$\frac{1}{2}$
$(\Xi_{9,2}, X_9)$	X_9	A_2	$x^4 + y^4 + z^3 + a_1x^2z^2 + a_2y^2z^2 + a_3xyz^2 + a_4x^2y^2 + a_5x^2yz + a_6xy^2z + a_7x^2y^2z + a_8x^2yz^2 + a_9xy^2z^2 + a_{10}x^2y^2z^2$	16	10	$\frac{2}{3}$

Анализ приведенной таблицы показывает, что возникновение сложных катастроф большой модальности возможно при относительно простых пространственных фокусировках, связанных с кривизной фронта и неоднородностью среды распространения, и временных фокусировках, связанных с частотной модуляцией импульса.

В соответствии с методами теории волновых катастроф в окрестности точек совместной пространственно-временной фокусировки равномерная асимптотика представляет собой сумму двух групп специальных функций:

- группы, содержащей специальную функцию краевой волновой катастрофы (СВК) и её производные по геометрооптическим коэффициентам λ_i^g и функциональным модулям a_i^g ,

- группы, содержащей специальную функцию сужения на край волновой катастрофы и её производных по краевым коэффициентам λ_i^E и функциональным модулям a_i^E

$$W_{\pm}(\vec{r}, t) \cong \exp(i\theta) \left\{ \left[l_1^g \Gamma^{\Sigma}(\vec{\lambda}; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \sum_{j=1}^{L_g} l_{j+1}^g \frac{\partial \Gamma^{\Sigma}}{\partial \lambda_j^g} + \sum_{j=1}^{M_g-1} l_{j+L}^g \frac{\partial \Gamma^{\Sigma}}{\partial a_j^g} \right] + \left[l_1^E \Gamma^{\Sigma_E}(\vec{\lambda}, \vec{a}) + \sum_{j=1}^{L_E} l_{j+1}^E \frac{\partial \Gamma^{\Sigma_E}}{\partial \lambda_j^E} + \sum_{j=1}^{M_E} l_{j+L}^E \frac{\partial \Gamma^{\Sigma_E}}{\partial a_j^E} \right] \right\} \quad (36)$$

Известно, что коэффициенты асимптотических разложений имеют вид асимптотически сходящихся рядов по большому параметру задачи Λ :

$$l_j(\Lambda; \vec{r}, t) = \Lambda^{\sigma_j} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} l_j^{(k)}(\Lambda; \vec{r}, t) = \Lambda^{\sigma_j} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\Lambda^k} \tilde{l}_j^{(k)}(\vec{r}, t). \quad (37)$$

Для исследования влияния пространственных фокусировок предположим, что начальный волновой фронт задается в виде некоторого возмущения параболического фронта. Пусть данное возмущение описывается функцией $B(\xi_1)$ (или $B(\xi_1, \xi_2)$), то есть уравнение волнового фронта имеет вид (см. например, [9]):

$$f(\xi_1) = \frac{\xi_1^2}{2R_c} + B(\xi_1), \quad \text{или} \quad f(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2R_c} + B(\xi_1, \xi_2). \quad (38)$$

При таком начальном распределении волнового фронта в трехмерном случае возможно появление целых серий каустических особенностей и различные типы пространственных фокусировок волновых полей. Например, если функция возмущения $B(\xi_1, \xi_2)$ является однородным полином третьей степени, то в точке с координатами $\vec{r} = (0, 0, R_c)$ возможно появление каустических особенностей серий D_N, E_N, J_N (двумерные катастрофы). Когда $B(\xi_1, \xi_2)$ – однородный полином четвертой степени, то возможно возникновение более сложных катастроф серий $X_{1,k}$ (в частности, X_9), $Y_{j,k}, Z_{l,k}, Z_N$ и других.

Если рассмотреть равномерную асимптотику решения интеграла (20) или (21) в окрестности особой точки типа катастрофы с позиций волновой теории катастроф, то решение может быть представлено в виде (см. [17]):

$$W(\vec{r}, t) \cong \exp(i\theta) \left[l_1^{\Sigma} \Gamma^{\Sigma}(\vec{\lambda}, \vec{a}) + \sum_{j=1}^L l_{j+1} \frac{\partial \Gamma^{\Sigma}}{\partial \lambda_j} + \sum_{j=1}^M l_{j+L+1} \frac{\partial \Gamma^{\Sigma}}{\partial a_j} \right], \quad (39)$$

где Σ – обозначает тип особенности,

$$I^\Sigma(\vec{\lambda}, \vec{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i F_\Sigma(\rho_1, \rho_2; \vec{a}, \vec{\lambda})] d\rho_1 d\rho_2 \quad - \text{ специальная функция волновой}$$

катастрофы (СВК), собственная для каждого типа волновой катастрофы,

$F_\Sigma(\rho_1, \rho_2; \vec{a}, \vec{\lambda})$ – универсальная деформация особенности,

a_j – функциональные модули ($\dim \vec{a} = M$),

M – модальность,

λ_j – коэффициенты универсальной деформации ($\dim \vec{\lambda} = L$),

L – коразмерность особенности,

ρ_j – внутренние параметры универсальной деформации,

l_j – коэффициенты асимптотического разложения,

θ – фаза бегущей волны.

В двухмерном случае, если возмущение $B(\xi_j)$ представляет собой полином с мономами выше второй степени, возможна лишь фокусировка каспоидного типа ($\Sigma = A_N$), являющаяся немодальной (простой) волной катастрофой. Её универсальная деформация — это многочлен степени $N+1$:

$$F_{A_N}(\rho; \vec{\lambda}) = \rho^{N+1} + \lambda_{N-1}\rho^{N-1} + \dots + \lambda_1\rho.$$

Как известно, СВК для данной особенности представляет собой обобщенную функцию Эйри:

$$I^{A_N}(\vec{\lambda}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i F_{A_N}(\rho; \vec{\lambda})] d\rho,$$

а равномерная асимптотика в этом случае имеет вид:

$$W(\vec{r}, t) \cong \exp(i\theta) \left[l_1 I^{A_N}(\vec{\lambda}) + \sum_{j=1}^{N-1} l_{j+1} \frac{\partial I^{A_N}}{\partial \lambda_j} \right]. \quad (40)$$

Если добавить дополнительное условие — отсутствие модуляции начального импульса ($\beta(\eta) = 0$), то решение будет иметь вид:

$$U(\vec{r}, t) = W_+(\vec{r}, t) + \bar{W}_+(\vec{r}, t). \quad (41)$$

Черта во втором слагаемом означает комплексное сопряжение.

Если предположить, что форма видеоимпульса описывается прямоугольной функцией Хевисайда и ограничиться только главным членом в формулах (26) или (27), то асимптотическое решение задачи будет иметь вид:

– для двумерного случая

$$\begin{aligned} U(\vec{r}, t) &= l_1 \left[\exp(i\theta) I^\Sigma(\vec{\lambda}, \vec{a}) + \exp(-i\theta) \bar{I}^\Sigma(\vec{\lambda}, \vec{a}) \right] = \\ &= 2l_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[\rho^{N+1} + \lambda_{N-1}\rho^{N-1} + \dots + \lambda_1\rho + \theta] d\rho, \end{aligned} \quad (42)$$

– для трехмерной задачи

$$\begin{aligned} U(\vec{r}, t) &= l_1 \left[\exp(i\theta) I^\Sigma(\vec{\lambda}, \vec{a}) + \exp(-i\theta) \bar{I}^\Sigma(\vec{\lambda}, \vec{a}) \right] = \\ &= 2l_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[F_\Sigma(\rho_1, \rho_2; \vec{a}, \vec{\lambda}) + \theta] d\rho_1 d\rho_2. \end{aligned} \quad (43)$$

В качестве примера рассмотрим структуру видеоимпульса в окрестности пространственной фокусировки типа “каустическое острие” в двумерном случае. Пусть начальный волновой фронт имеет форму:

$$f(\xi) = \frac{1}{2}a\xi^2 + \frac{1}{24}b_1\xi^4 + \frac{1}{720}b_2\xi^6.$$

Тогда расстояние R от начального волнового фронта до точки наблюдения задается формулой:

$$R = \sqrt{(X - f(\xi))^2 + (Y - \xi)^2},$$

а решение будет иметь вид

$$U = W_+ + \bar{W}_+,$$

где:

$$\begin{aligned} W_+ &= \int B \exp(i\varphi) d\xi = e^{i\theta} \left(l_1 I_-^{A_3} + l_2 \frac{\partial I_-^{A_3}}{\partial \lambda_1} + l_3 \frac{\partial I_-^{A_3}}{\partial \lambda_1} \right), \\ \bar{W}_+ &= \int \bar{B} \exp(-i\varphi) d\xi = e^{-i\theta} \left(\bar{l}_1 I_+^{A_3} + \bar{l}_2 \frac{\partial I_+^{A_3}}{\partial \lambda_1} + \bar{l}_3 \frac{\partial I_+^{A_3}}{\partial \lambda_1} \right), \\ B &= -A(\xi, 0) \frac{\varepsilon(\tilde{\omega})^{1/4} \sqrt{|\tilde{\omega}|} e^{-\tilde{\delta}}}{2\pi R \sqrt{|Q'_\omega|} \varphi'_\eta|_{\eta=0}} \sqrt{1 + (f'_\xi)^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

В формуле (44) используется СВК, известная как функция Пирси [18]:

$$I_+^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(\rho^4 + \lambda_2 \rho^2 + \lambda_1 \rho)] d\rho. \quad (45)$$

Для определения аргументов функции Пирси, коэффициентов асимптотического разложения и фазы бегущей волны в формуле (44) могут быть использованы различные методы, например, метод локальной асимптотики, развитый в [19-23].

Главный член асимптотики может быть представлен через модифицированную функцию Пирси:

$$Vid(\lambda_1, \lambda_2) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\rho^4 + \lambda_2 \rho^2 + \lambda_1 \rho - \theta) d\rho, \quad (46)$$

которая учитывает осцилляции поля по оси времени.

Рассмотрим поведение модифицированной функции Пирси, при различных значениях параметров. Отметим, что величина θ задает фазу бегущей волны.

На рисунках 4а и 4б приведено распределение амплитуды интеграла (46) для значений $\theta = -3$ и $\theta = -\lambda_2$ соответственно.

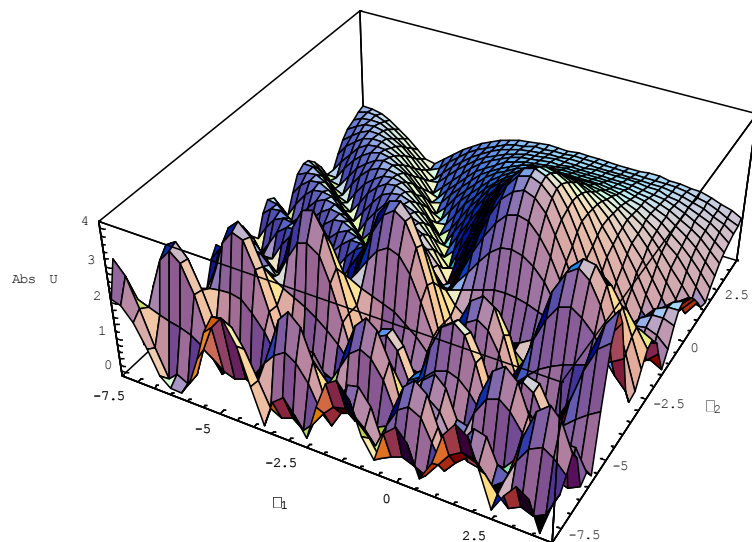


Рис. 4а.

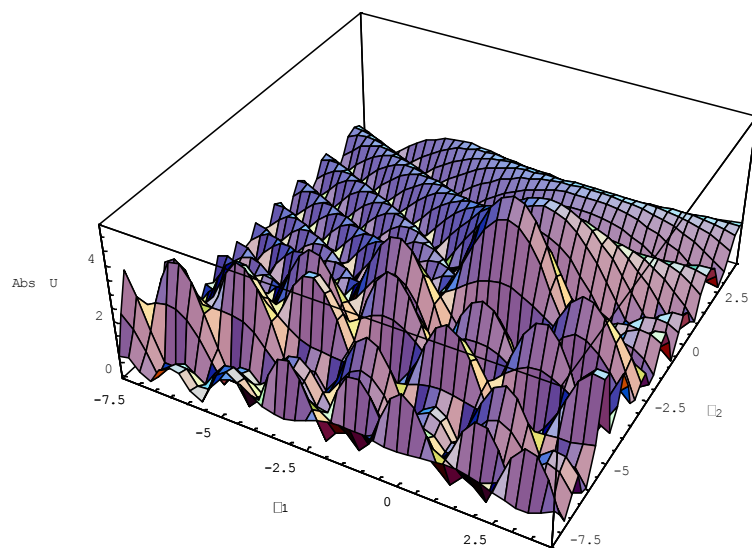


Рис. 4б.

На рисунках 5а и 5б рассматривается распределение амплитуды интеграла (46) при изменении параметра λ_1 . На рисунке 5а значение $\lambda_1 = 0$, на рисунке 5б $\lambda_1 = -4$.

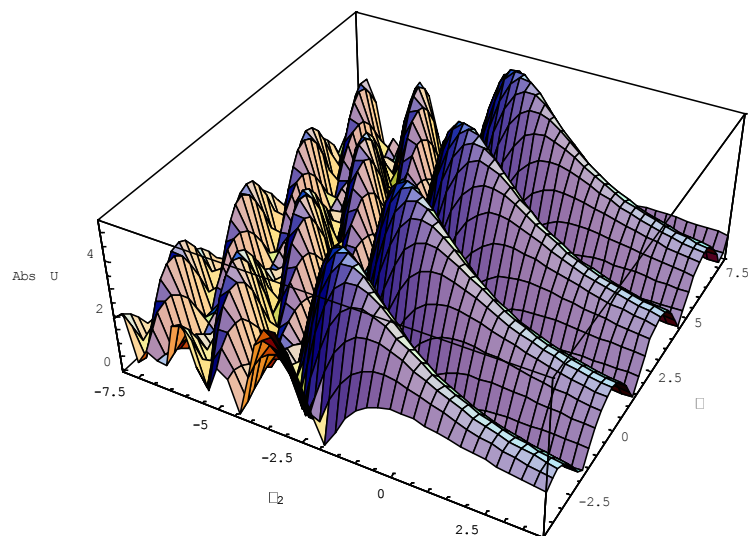


Рис. 5а.

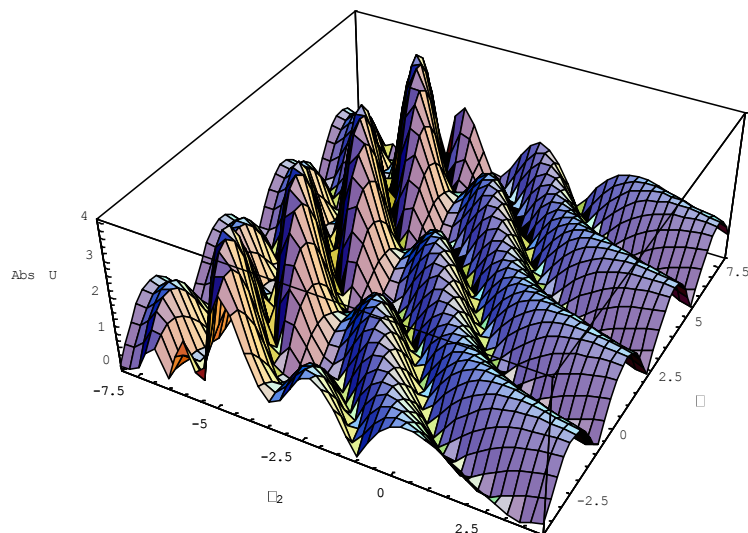


Рис. 5б.

И, наконец, на рисунках 6а и 6б рассматривается распределение амплитуды интеграла (46) при различных фиксированных значениях параметра λ_2 . На рисунке 6а значение $\lambda_2 = 0$, на рисунке 6б — $\lambda_2 = -4$.

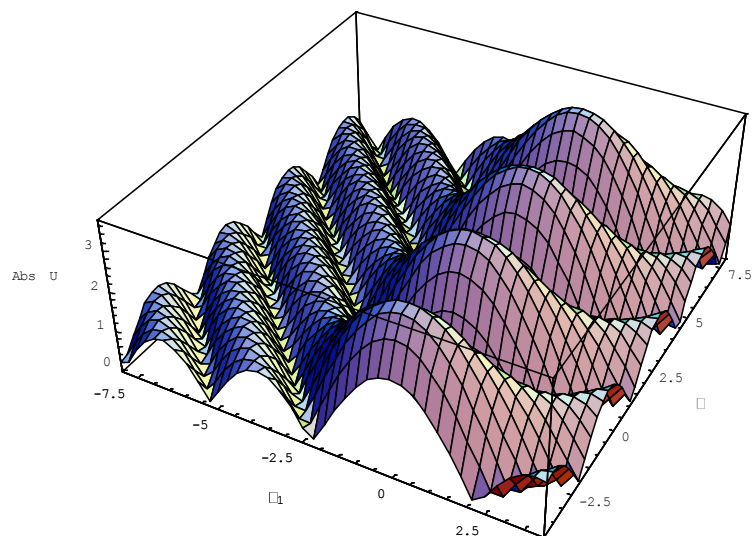


Рис. 6а.

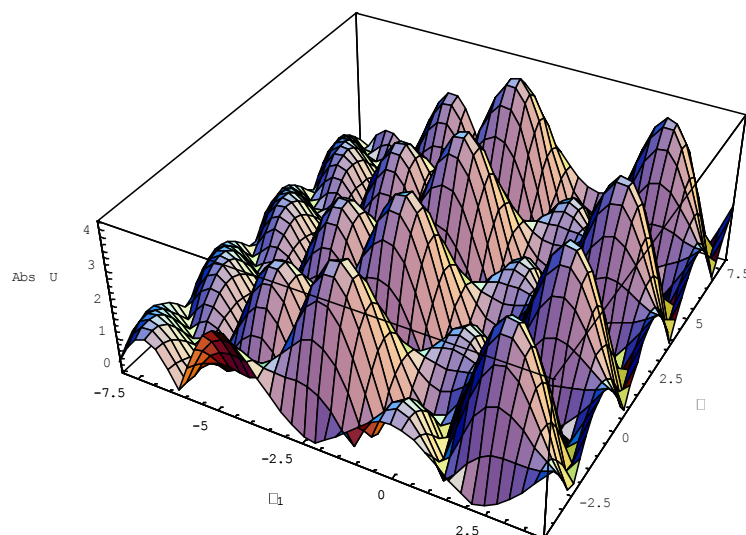


Рис. 6б.

Приведем результаты численного моделирования собственно волнового поля. Параметры задачи выбраны следующим образом: $c = 300\,000$ км/с – скорость света; $f_p = 10$ МГц – плазменная частота; $\omega_p = 6,28319 \times 10^7$ (с⁻¹) – круговая плазменная частота; $a = 1/600$ м, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ – параметры, задающие поверхность искривленного начального волнового фронта. Предполагается, что начальная форма сигнала это ступенька единичной амплитуды.

На рис. 7 показана амплитуда поля (в расчетах был вычислен только главный член) в виде трехмерного изображения и в виде линий равного уровня в случае, когда $X = 600$ м, $t_c = 3 \times 10^{-6}$ с, а $v = 3 \times 10^6$ с⁻¹. На рис. 8 для сравнения приведена функция Пирси, соответствующая тем же параметрам задачи.

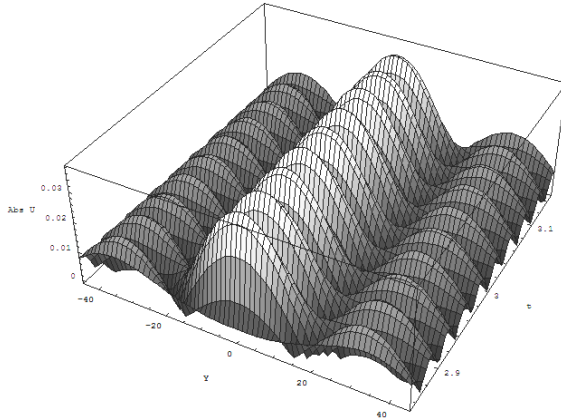


Рис. 7.

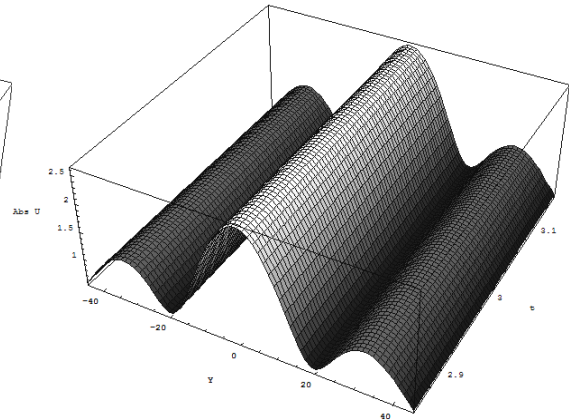


Рис. 8.

На рис. 9 показано трехмерное распределение амплитудной структуры поля в координатах (X, Y) при следующих значениях параметров $t_c = 3$, $t = 3$. График описывает амплитуду сигнала вблизи границы светового конуса (время прихода сигнала в точку наблюдения со скоростью света 2 мкс), который отрезает часть структуры каустического острия, при $t = t_c$. Структура поля в окрестности светового конуса (граница черной области) имеет более сложный характер, чем показано на рисунке (подробнее см. в [15]).

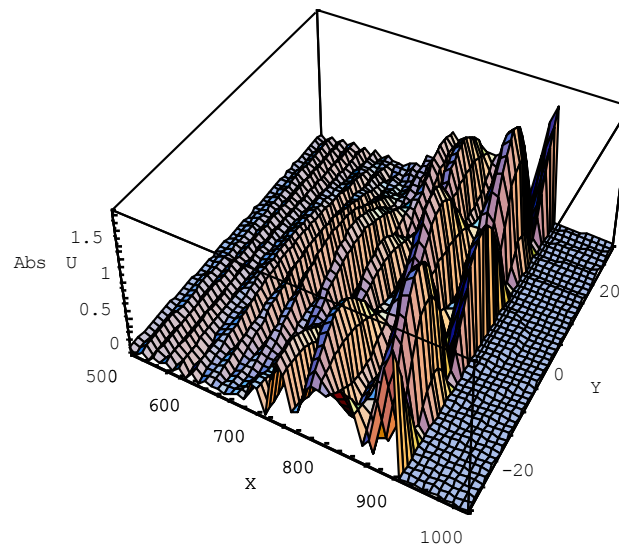


Рис. 9.

Аналогично могут быть рассмотрены и другие структуры, описывающие поведение электромагнитного поля при прохождении видеоимпульса через области пространственной фокусировки типа катастроф разных порядков с учетом поглощения в среде и частотной дисперсии.

Проблеме дифракции и распространения электромагнитного излучения и особенностям волновых полей как в однородных, так и диспергирующих средах посвящено значительное число работ, из которых следует выделить работы [24-27], содержащие нетривиальные результаты.

Изоженная здесь теория равномерных асимптотик волновых полей описывает прохождение видеоимпульса через область пространственной фокусировки типа катастроф разных порядков с учетом поглощения в среде и частотной дисперсии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №№ 12-02-00413, 13-07-00937.

Литература

1. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
2. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции. Учебное пособие. М.: МФТИ, 1999. 134 с.
3. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстро осциллирующих функций с вырожденными седловыми точками: Препринт - ИРЭ АН СССР. М., 1984. 41 (413). 75 с.
4. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые катастрофы и асимптотики // ДАН СССР. 1986. Т.291. №4. С.823-827.
5. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики и угловые катастрофы. // Доклады РАН. 1995. Т.341. № 4. С. 456-459.
6. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Волновые катастрофы – фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн. // Радиотехника и электроника, 2006. Т.51. №10. С. 1155-1192.
7. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Классификация и равномерное асимптотическое описание пространственно-временных трехмерных краевых фокусировок волновых полей. // Радиотехника и электроника, 2005. Т.50. №10. С. 1221-1230.
8. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. Казань: Каз. авиационный ин-т, 1988. 199 с.
9. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Вергизаев И.А. Трехмерные пространственно-временные фокусировки волновых полей типа катастроф. // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44. № 4. С. 455 - 462.
10. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965. 553 с.
11. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.
12. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Часть I. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982. 304 с.
13. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Классификация унимодальных и бимодальных угловых катастроф // Функциональный анализ и его приложения. 1992. Т.26. Вып.3. С.77–79.
14. [14] Kryukovsky A.S., Rastyagaev D.V. The classification of the corner singularities. // Phystech Journal. 1997. V.3. N 4. P. 63-71.
15. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Теория пространственной фокусировки видеоимпульсов в диспергирующих средах. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т.12. № 8. С.15-25.
16. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Особенности пространственной фокусировки широкополосного излучения в диспергирующих средах с поглощением. // Сверхширокополосные сигналы в радиолокации, связи и акустике: сб. докладов Второй

Всероссийской научной конференции-семинара. Муром, 4-7 июля 2006 г. - Муромский институт Владим. ГУ. – Муром: Полиграфический центр МИ ВлГУ, 2006. С.42-46.

17. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Построение равномерной геометрической теории дифракции методами краевых и угловых катастроф. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 9. С. 1044-1060.

18. *Pearcey T.* The structure of an electromagnetic field in the neighborhood of a cusp of a caustic // *Philos. Mag.*, 1946. V. 37. P. 311 – 317.

19. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Определение структуры коротко волнового поля в областях одномерной фокусировки в плоскостной среде. - Труды VI конф. молод. ученых. Моск. физ.-техн. института. - МФТИ.М., 1981. С. 218 - 227. Рук. деп. в ВИНТИ 2 июля 1981, № 3278- 81.

20. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Локальное асимптотическое описание электромагнитного поля в окрестности каустического острия в плоско-слоистой среде. - Вопросы дифракции электромагнитных волн. Межвед. сборник - МФТИ. М., 1982. С. 40 - 45.

21. *Крюковский А.С.* Локальные равномерные асимптотики волновых полей в окрестности основных и краевых каспидных каустик. – Радиотехника и электроника. 1996. Т.41. № 1. С. 59-65.

22. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* Локальная асимптотика быстроосциллирующих интегралов, описывающих волновое поле в областях фокусировки // Дифракция и распространение электромагнитных волн. Междувед. сб. / МФТИ. М., 1984. С. 39 – 53.

23. *Крюковский А.С., Лукин Д.С.* К вопросу о поле в окрестности каустического острия в ионосферном плазменном слое. // Радиотехника и электроника, 1981. Т. 26. № 6. С. 1121 – 1126.

24. *Апельцин В.Ф., Кюркчан А.Г.* Аналитические свойства волновых полей. М.: изд. МГУ. 1990. 208 с.

25. *Кюркчан А.Г., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е.* Особенности продолжения волновых полей // УФН. 1996. Т. 166. №12. С. 1285-1308.

26. *Иванов Д.В.* Методы и математические модели исследования распространения в ионосфере сложных дециметровых сигналов и коррекции их дисперсионных искажений: Монография -Йошкар-Ола: Марийский гостехуниверситет, 2006.

27. *Анютин А.П., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Иванов Д.В., Иванов В.А., Лащевский А.Р.* Дисперсионные искажения широкополосных сигналов при распространении в ионосфере. Теория и эксперимент. // «Распространение радиоволн», сб. докл. XXIII Всероссийской научной конференции. (23–26 мая 2011; Йошкар-Ола) /Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, 2011. Т.1. С. 31-38.