Анализ собственных векторов и значений на примере широкополосного КНЧ-сигнала

Л.В. Грунская, В.В. Исакевич, Д.В. Исакевич

Владимирский государственный университет, 600000, г. Владимир, ул. Горького, д.87, grunsk@vlsu.ru

Общество с ограниченной ответственностью «БизнесСофтСервис», 600001, г. Владимир, ул. Б. Московская, д.61, оф.11, businesssoftservice@yandex.ru

Рассмотрен и обобщен способ анализа собственных векторов и значений ковариационной матрицы временного ряда электрического поля КНЧ-диапазона. Показан сложномодулированный характер собственных векторов и инвариантность вида нормированного спектра собственных значений к шагу смещения интервала анализа по временному ряду.

The analysis of eigenvector and engenvalue computing of time series covariance matrix is considered and applied to time series of electrical field in extra low frequency range. The invariance of normed eigenvalues to the change of frame offset step is proved.

Для анализа вещественного временного ряда $X = (x_1 x_2 x_3 \dots x_N)$ построим так называемую траекторную матрицу вида

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{N-F+1} \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{N-F+2} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_{N-F+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_F & x_{F+1} & x_{F+2} & \dots & x_N \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Эта матрица представляет собой ансамбль в некотором F-мерном евклидовом пространстве, содержащий фрагменты временного ряда X на разных интервалах анализа (каждый из которых содержит F отсчетов). Объем ансамбля — $L = N - F + 1$. Ковариационная нецентральная матрица (то есть матрица вторых начальных моментов) для ансамбля Tвычисляется по формуле:

$$C = \frac{TT'}{L}, \quad (2)$$

где $'$— операция транспонирования.

Матрица C симметричная и выражает содержащиеся в ансамбле связи между F разными координатами ансамбля, а собственные вектора этой матрицы выражают независимые составляющие ансамбля:

$$V'CV = D, \quad (3)$$

где V— ортогональная матрица, столбцы которой составляют ортонормированный базис собственных векторов (СВ) ковариационной матрицы C;

D— диагональная матрица, содержащая в k-ом столбце собственное значение (СЗ), соответствующее k-ому собственному вектору.

Представим ансамбль T в базисе СВ. При этом проекция на k-ый СВ является матрицей-строкой длины L и имеет вид

$$S_k = \left(\sum_{j=1}^{F} x_j v_{jk} \quad \sum_{j=1}^{F} x_{j+1} v_{jk} \quad \sum_{j=1}^{F} x_{j+2} v_{jk} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^{F} x_{j+N-F} v_{jk}\right), \quad (4)$$

v_{jk}— j-ая координата k-ого собственного вектора.

Проекцию S_k можно рассматривать как временной ряд, который выражает изменение во времени k-ой составляющей исходного временного ряда X. Средняя энергия p_k этой составляющей равна

$$p_k = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{F} x_{i+j-1}^2 v_{jk}^2. \quad (5)$$

Используя тот факт, что СВ нормированы, выразим суммарную среднюю мощность составляющих ряда через элементы его ковариационной матрицы C:

$$\sum_{k=1}^{F} p_k = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{F}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{F} x_{i+j-1}^2 v_{jk}^2 = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{F} x_{i+j-1}^2 = \sum_{j=1}^{F}\left(\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} x_{i+j-1}^2\right) = \sum_{j=1}^{F} c_{jj}, \quad (6)$$

где c_{jj}— j-ый диагональный элемент матрицы C.

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{F} p_k = TrC = \sum_{j=1}^{F} d_{jj}, \quad (7)$$

где TrC— след ковариационной матрицы,

d_{jj}— j-ое собственное значение (j-ый диагональный элемент матрицы собственных значений D).

В соответствии с (7), СЗ выражает среднюю энергию проекции S_k временного ряда X на соответствующий СВ. Нормированное к следу ковариационной матрицы СЗ выражает относительную среднюю энергию составляющей S_k во временном ряде. Используя понятие спектра матрицы, будем называть совокупность всех нормированных СЗ «нормированным спектром СЗ». Для определенности, упорядочим нормированный спектр СЗ по убыванию; отдельные СВ будем также рассматривать в порядке убывания нормированных СЗ.

В соответствии с (1)-(7), анализ СВ и СЗ временного ряда позволяет разложить временной ряд на взаимно независимые составляющие. При этом СВ (часто называемые «эмпирическими ортогональными функциями») выражают характер составляющих ряда, а проекции ансамбля на СВ (известные также, как «главные компоненты») — поведение этих составляющих во времени.

Следует отметить, что известны различные варианты анализа, использующего такие разложения. [1, 2] Мы же будем уделять основное внимание анализу СВ и СЗ, а не главных компонент, и ограничимся при этом одномерными временными рядами.

В качестве примера наблюдений рассмотрим временной ряд вертикальной составляющей электрического поля в приземном слое атмосферы Земли (станция Воейково, 1966-1995 гг., период следования отсчетов ряда — 1 час, длительность наблюдений — 262968 часов). Примем длительность интервала анализа равной $F = 960$ отсчетов (40 суток). Тогда объем ансамбля $L = 262009$. Графики первых четырех СВ, полученных при таком анализе, изображены на рис.1.

Как видно из графиков, первый СВ соответствует постоянной составляющей ряда, в то время как следующие три СВ близки к гармоническим. Поэтому разумно анализировать сходство СВ с гармоническими векторами на представляющих интерес частотах. Такой анализ может осуществляться при помощи того или иного критерия, оцениваемого для СВ, а также посредством вычисления преобразования Фурье от СВ.

На рис.1 изображен также график типичного СВ (в качестве примера взят СВ №20), а на рис.2 — его амплитудный спектр. Видно, что СВ не представляют гармонические колебания в чистом виде, а модулированы сложным образом. Такое поведение характерно для большинства СВ, получаемых при анализе временных рядов электрического и магнитного полей с временем дискретизации 1 час.

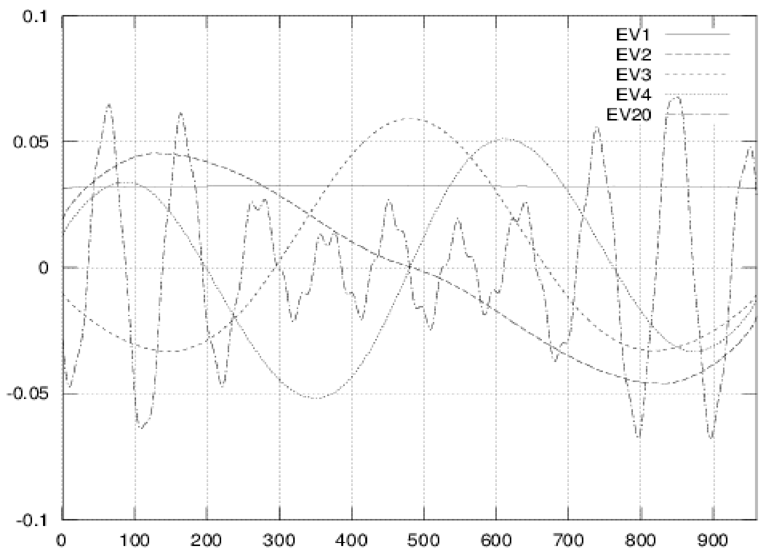

Рис.1. Собственные вектора №№1-4 и №20 временного ряда электрического поля (Воейково). $F = 960$. Шаг смещения кадра $S = 1$.

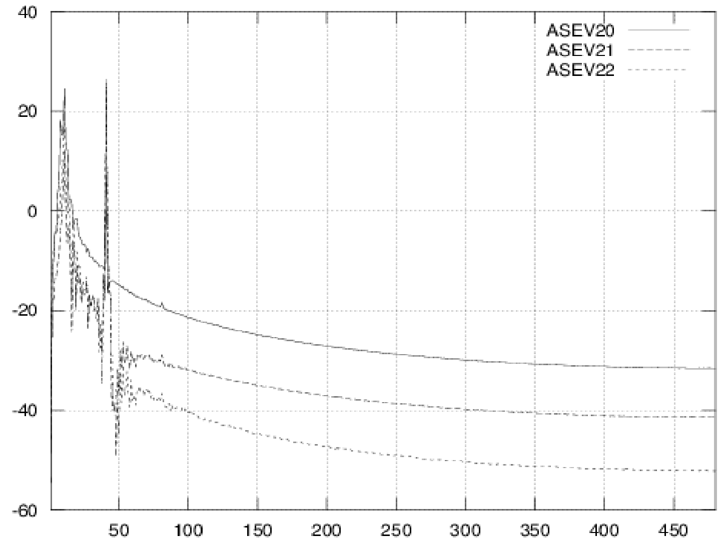

Рис.2. Амплитудный спектр СВ №№20-22 временного ряда электрического поля (Воейково). $F = 960$. Шаг смещения кадра $S = 1$.

Отметим, что описанный выше способ анализа ряда может быть видоизменен. В частности, построение ансамбля T может осуществляться следующим образом:

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & x_{S+1} & x_{2S+1} & \dots & x_{(L-1)F+1} \\ x_2 & x_{S+2} & x_{2S+2} & \dots & x_{(L-1)F+2} \\ x_3 & x_{S+3} & x_{2S+3} & \dots & x_{(L-1)F+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_F & x_{S+F} & x_{2S+F} & \dots & x_{LF} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где S— шаг смещения кадра.

При использовании формулы (8) для построения ансамбля интервал анализа длины F отсчетов занимает не все возможные положения на временном ряде, а лишь отстоящие друг от друга на заданный шаг. Получаемые при таком анализе собственные вектора имеют вид негармонических периодичностей, период которых равен шагу смещения интервала анализа (см. рис.3); эти периодичности модулированы аналогично случаю, представленному на рис.2.

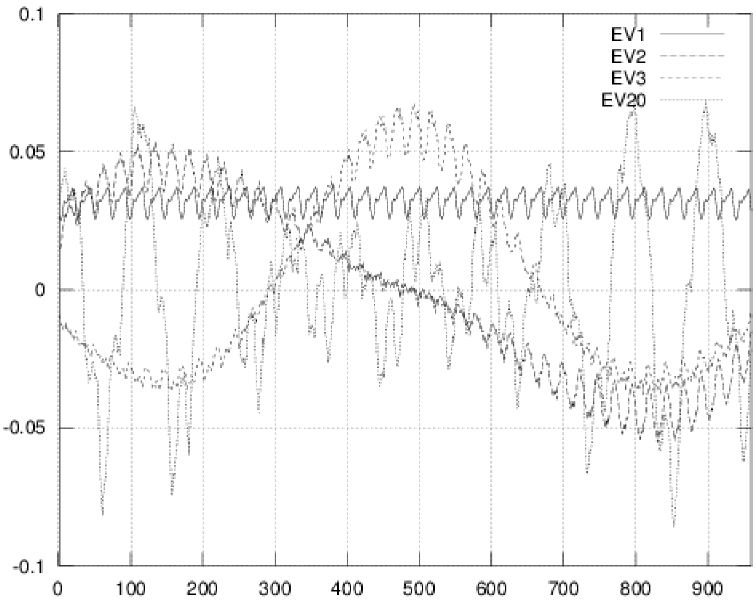

Рис.3. Собственные вектора №№1-4 и №20 временного ряда электрического поля (Воейково). $F = 960$. Шаг смещения интервала анализа $S = 1$.

В обоих рассмотренных случаях анализу подвергается один и тот же временной ряд; при этом осуществляется его разложение на некоррелированные составляющие двумя различными способами. Используя нормированные спектры СЗ, оценим относительные средние энергии этих составляющих для разных значениях S(рис.4).

Как видно из рис.4, распределение относительных средних энергий независимых составляющих временного ряда практически не зависит от шага смещения интервала анализа. Таким образом, оба представления ряда в равной степени экономичны. Вместе с тем, полученные спектры существенно отличаются как от нормированного спектра БГШ, так и от нормированного спектра логистической последовательности Фейгенбаума. Вместе с тем, как и для последовательности Фейгенбаума, нормированный спектр СЗ достаточно длинного ряда электрического поля практически не зависит от S.

Нормированные СЗ (и относительные средние энергии) составляющих временного ряда электрического поля убывают по закону, близкому к степенному, причем показатель степени составляет не более -0.2 для энергетически доминирующих составляющих и не менее -1 для недоминирующих.

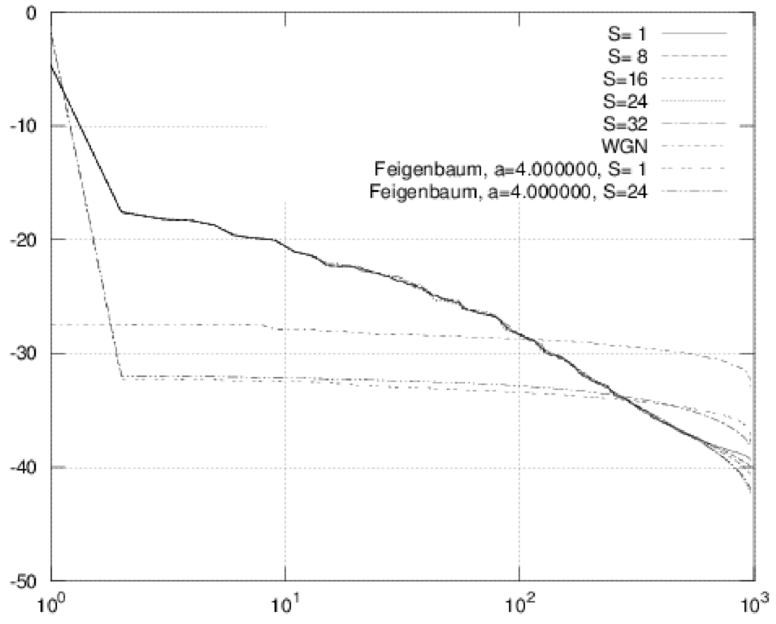

Рис.4. Нормированные спектры СЗ временного ряда электрического поля (Воейково). $F = 960$, шаг смещения от 1 до 32. Нижние графики — нормированные спектры СЗ белого гауссовского шума (WGN) и рекуррентной логистической последовательности Фейгенбаума (Feigenbaum) вида $x_{k+1} = ax_k(1 - x_k)$ с параметром $a = 4$.

Литература

1. Метод «Гусеница» под ред. Д.Л. Данилова и А.А. Жиглявского. СПб:Пресском, 1997 – Режим доступа: http://www.gistatgroup.com/gus/book1/preface.html
2. Нелинейный метод главных компонент. Режим доступа: http://pca.narod.ru