Интегральные уравнения электродинамики

А.Б. Самохин

Московский Государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники
г. Москва, 119454, пр. Вернадского, 78, E-mail: absamokhin@yandex.ru

Мы рассматриваем объемные сингулярные интегральные уравнения, которые описывают задачи рассеяния электромагнитных волн на трехмерных неоднородных диэлектрических структурах. Проводим математическое исследование уравнений, формулируем теоремы существования и единственности решения.

We consider volume singular integral equations which describe the problems of electromagnetic scattering on 3D inhomogeneous dielectric structures.

1. Введение

Ниже мы будем рассматривать объемные интегральные уравнения следующего вида

$$a(x)u(x)+\int_Q \frac{K(x-y)}{|x-y|^m}b(y)u(y)dy = f(x),\ x\in Q\ , m\le 3\ ,$$

где Q – заданная область трехмерного пространства;

$u(x)$ – неизвестная функция или вектор функция,

$a(x)$, $b(x)$, $K(x)$ – заданные функции или матричные функции координат.

Многие важные классы задач математической физики описываются интегральными уравнениями приведенного вида. К таким задачам относятся: задачи рассеяния акустических волн на прозрачных телах; задачи квантовомеханического рассеяния на ограниченном потенциале; задачи электромагнитного рассеяния на трехмерных диэлектрических структурах. Соответствующие интегральные операторы будут компактными (m=1) для скалярных задач исингулярными (m=3) для электромагнитных задач.

Почему мы рассматриваем интегральные уравнения,хотя исходные физические задачи обычно формулируются в терминах уравнений с частными производными с соответствующими граничными условиями? Для этого есть две основные причины.

I. Один из путей математического исследования исходной задачи математической физики (доказательство теорем существования и единственности решения и т.д.) состоит в следующем. Мы сводим исходную краевую задачу к интегральному уравнению. Затем устанавливаем эквивалентность дифференциальной формулировки задачи и соответствующего интегрального уравнения. Это означает, что любое решение интегрального уравнения (может быть, с некоторыми ограничениями на параметры задачи) удовлетворяет уравнениям с частными производными и соответствующим граничным условиям и обратно – любое решение дифференциальной задачи является решением интегрального уравнения. Основываясь на интегральных неравенствах, которые обычно следуют из дифференциальной формулировки задачи, мы доказываем теорему единственности решения. Затем, используя теорию разрешимости интегральных уравненийв подходящем, с физической точки зрения, функциональном пространстве, доказываем теоремы существования и единственности решения и другие математические факты для исходной задачи математической физики. Ниже мы будем следовать этим шагам.

II. Кроме того, могут быть построены эффективные методы и алгоритмы численного решения объемных интегральных уравнений, описывающих исходные задачи математической физики.

2. Интегральные уравнения

2.1.Формулировка проблемы

Рассмотрим следующий класс задач электродинамики. Пусть в конечной области Q среда характеризуется тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ (матрица размерности 3х3), причем компоненты этого тензора являются переменными функциями координат. Вне области Q параметры среды постоянны и изотропны т.е. $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$ и везде $\mu = \mu_0 = const$. Требуется определить электромагнитное поле, возбуждаемое в данной среде внешним полем с временной зависимостью в виде множителя $\exp(-i\omega t)$, источником которого может быть как падающая плоская волна, так и сторонние токи $\vec{J}^0$. В такой постановке соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти векторные функции $\vec{E}$ и $\vec{H}$, удовлетворяющие уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\hat{\varepsilon}\,\vec{E} + \vec{J}^0, \operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\mu_0\,\vec{H} \qquad (2.1.1)$$

и условию излучения на бесконечности вида (1.1.2), где $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.В (2.1.1) $\vec{J}^0$ - заданный ток, создающий внешнее поле $\vec{E}^0$, $\vec{H}^0$ и, согласно физическому смыслу задачи, $\operatorname{Im}\varepsilon_0 \geq 0$, $\operatorname{Im}\mu_0 \geq 0$, $\operatorname{Im}k_0 \geq 0$.

2.2.Интегродифференциальное уравнение

Перепишем уравнения (2.1.1) в эквивалентном виде

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\varepsilon_0\vec{E} + \vec{J}, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H}\,. \qquad (2.2.1)$$

Здесь

$$\vec{J} = \vec{J}^0 + \vec{J}^p, \vec{J}^p = -i\omega(\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0\hat{I})\vec{E} \qquad (2.2.2)$$

В (2.2.3) $\vec{J}^p$ - электрический ток поляризации, который, очевидно, не равен нулю только в областиQ.

Мы можем формально рассматривать (2.2.1) как уравнения Максвелла в однородной среде, полагая, что электромагнитное поле создается током $\vec{J}$. Тогда решение (2.2.1), удовлетворяющее условию излучения на бесконечности, можно записать через векторный потенциал $\vec{A}$ по известным формулам

$$\vec{A}(x) = \int \vec{J}(y)G(R)\,dy\,, \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{A} - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}, \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \qquad (2.2.4)$$

В (2.2.4) G– функция Грина уравнения Гельмгольца

$$G(R) = \frac{\exp(ik_0R)}{4\pi R}. \qquad (2.2.6)$$

Из (2.2.2)-(2.2.6) мы получаем, что неизвестное электромагнитное поле может быть представлено в виде

$$\vec{E}(x) = \vec{E}^0(x) + k_0^2\int_Q(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y)G(R)\,dy +$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y)G(R)\,dy, \; x \in E_3 \qquad (2.2.7)$$

$$\vec{H}(x) = \vec{H}^0(x) - i\omega\varepsilon_0\operatorname{rot}\int_Q(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y)G(R)\,dy, \; x \in E_3\,, \qquad (2.2.8)$$

где $R = |x - y|$; $x = (x_1, x_2, x_3)$; $y = (y_1, y_2, y_3)$; $\hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon}/\varepsilon_0$.

В (2.2.7)-(2.2.8) $\vec{E}^0(x), \vec{H}^0(x)$ - электромагнитное поле, которое создается известным током $\vec{J}^0$ в однородном пространстве с параметрами ε_0 и μ_0, т.е. вычисляется по формулам вида (2.2.4), (2.2.5).

Поскольку $\hat{\varepsilon}_r = \hat{I}$ ($\hat{I}$ - единичный тензор)вне областиQ, то мы можем свести исходную задачу к объемному интегродифференциальному уравнению относительно электрического поля $\vec{E}$ в области Q

$$\vec{E}(x) - k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\vec{E}(y)G(R)\,dy - \operatorname{grad}\operatorname{div} \int_Q (\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\vec{E}(y)G(R)\,dy = \vec{E}^0(x),\ x \in Q\,. \quad (2.2.9)$$

Если будет найдено решение (2.2.9) в областиQ, то можно вычислить электромагнитное поле вне области, используя интегральные представления (2.2.7), (2.2.8).

Отметим, что операцию *graddiv* нельзя внести под знак интеграла в (2.2.9), так как функция G в этом случае должна дважды дифференцироваться по координатам, и тогда в ядре интегрального уравнения появится член $\sim 1/R^3$ и соответствующие интегралы потеряют смысл. Однако операцию *rot* в (2.2.8) можно внести под знак интеграла и при этом ядро интегрального оператора будет иметь слабую интегрируемую особенность $\sim 1/R^2$.

2.3.Сингулярные интегральные уравнения

Представим функцию $G(R)$ в виде

$$G(R) = G_0(R) + G_1(R)\,, G_0(R) = \frac{\exp(ik_0R) - 1}{4\pi R}, \quad G_1 = \frac{1}{4\pi R} \quad (2.3.1)$$

Тогда, подставляя (2.3.1) в (2.2.9), получим

$$\vec{E}(x) - k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\vec{E}(y)G(R)\,dy - \operatorname{grad}\operatorname{div} \int_Q (\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\vec{E}(y)G_1(R)\,dy -$$

$$\int_Q \Big((\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\vec{E}(y), \operatorname{grad}\Big) \operatorname{grad} G_0(R)\,dy = \vec{E}^0(x),\ x \in Q \quad (2.3.2)$$

Здесь символ $(*,*)$ обозначает скалярное произведение векторов.

Учитывая, что сингулярный интеграл с полярным ядром (особенность вида $\sim 1/R^m, m < 3$) равен интегралу в обычном смысле, следует (см. разделы 3.2, 3.3), что уравнение (2.3.2) может быть сведено к сингулярному объемному интегральному уравнению

$$\vec{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})\vec{E}(x) - p.v.\int_Q \Big((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y), \operatorname{grad}\Big) \operatorname{grad} G(R)\,dy -$$

$$k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y)G(R)\,dy = \vec{E}^0(x),\ x \in Q. \quad (2.3.3)$$

Сингулярное интегральное уравнение (2.3.3) математически строго получено из уравнения (2.2.9). Поэтому, для упрощения ряда доказательств, мы будем иногда использовать уравнение (2.2.9).

2.4.Утверждение эквивалентности

Покажем эквивалентность уравнений Максвелла (2.1.1) и интегральных уравнений. При этомбудем полагать, что электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла в обычном смысле, т.е. поточечно. Такие решения исходной задачи будем называть *классическими решениями*.

Из вывода интегральных уравнений следует, что любое решение уравнений Максвелла (2.1.1), удовлетворяющее условию излучения, является решением интегрального уравнения (2.3.3).Для того, чтобы доказать обратное утверждение, будем полагать: *(I) компоненты тензор функции* $\hat{\varepsilon}$ *- везде в пространстве* E_3 *Гельдер непрерывные функции; (II) внешнее поле удовлетворяет уравнениям Максвелла*

$$\operatorname{rot}\vec{H}^0 = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}^0 + \vec{J}^0, \operatorname{rot}\vec{E}^0 = i\omega\mu_0\vec{H}^0 \tag{2.4.1}$$

и условиям излучения.

При выполнении указанных условий I и II, любое решение интегрального уравнения в $\vec{L}_2(Q)$ будет Гельдер непрерывным. Кроме того, из интегрального представления поля (2.2.7), (2.2.8) следует, что оно удовлетворяет условию излучения.

Обозначим

$$\vec{V}(x) = \int_Q [\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I}]\vec{E}(y)G(R)dy. \tag{2.4.2}$$

Подставляя $\vec{E}(x)$ и $\vec{H}(x)$ из (2.2.7), (2.2.8) в первое уравнение (2.1.1) и принимая во внимание (2.4.1), получим

$$\operatorname{rot}\vec{H} + i\omega\hat{\varepsilon}\vec{E} - \vec{J}^0 = \operatorname{rot}\vec{H}^0 - i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V} + i\omega\hat{\varepsilon}\vec{E}^0 +$$
$$i\omega\hat{\varepsilon}k_0^2\vec{V} + i\omega\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} - \vec{J}^0 = i\omega(\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0\hat{I})[\vec{E}^0 + k_0^2\vec{V} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V}] +$$
$$i\omega\varepsilon_0[-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} + k_0^2 V] \tag{2.4.3}$$

Далее, вектор функция $\vec{V}(x)$,при условии Гельдер непрерывности $[\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I}]\,\vec{E}(x)$, удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\vec{V} + k_0{}^2\vec{V} = -[\hat{\varepsilon}_r - \hat{I}]\,\vec{E}.$$

Тогда, учитывая векторное тождество $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{B} - \Delta\vec{B}$, получим

$$[-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} + k_0^2 V] = -\frac{1}{\varepsilon_0}[\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0\hat{I}]\,\vec{E}.$$

Таким образом, из (2.4.3) имеем

$$\operatorname{rot}\vec{H} + i\omega\hat{\varepsilon}\vec{E} - \vec{J}^0 = i\omega(\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0 I)[-\vec{E} + \vec{E}^0 + k_0^2\vec{V} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V}] \tag{2.4.4}$$

Теперь из (2.2.7) и (2.4.2) следует, что правая часть (2.4.4) тождественно равна нулю.

Применяя аналогичные выкладки, можно показать, что второе уравнение (2.1.1) будет тождеством после подстановки $\vec{E}(x)$ и $\vec{H}(x)$ из (2.2.7), (2.2.8).

Значит, *при выполнении условий I и II, любое решение интегрального уравнения (2.3.3) в области Q и интегральное представление поля (2.2.7), (2.2.8) в области* $E_3 \setminus Q$ *всюду удовлетворяет уравнениям Максвелла и условию излучения. Обратно любое решение уравнений Максвелла (2.2.1), удовлетворяющее условию излучения, является решением интегральной задачи.*

2.5. Утверждения единственности

Теперь рассмотрим вопрос о единственности решения исходной задачи. Из второго уравнения (2.1.1) имеем

$$\operatorname{rot}\vec{E}^* = -i\omega\mu_o^*\vec{H}^*. \tag{2.5.1}$$

Пусть Ω_r - шар радиуса *r*, который содержит область*Q*. Умножая первое уравнение (2.1.1) на $\vec{E}^*$, а уравнение (2.5.1) на $\vec{H}$,получим равенство

$$-\int_{\Omega r}\vec{E}^*\vec{J}^0 dv = \int_{\Omega_r}\left(\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}^* - \vec{E}^*\operatorname{rot}\vec{H}\right)dv - -i\omega\int_{\Omega_r}\vec{E}^*\hat{\varepsilon}\vec{E}dv + i\omega\mu_0^*\int_{\Omega_r}\left|\vec{H}\right|^2 dv \tag{2.5.2}$$

Теперь применим векторную функцию Грина к первому интегралу в правой части

(2.5.2) и рассмотрим предел при $r \to \infty$. Тогда мнимая часть результата имеет вид

$$-\operatorname{Re}\int_{E_3} \vec{E}^* \vec{J}^0 dv = \omega \operatorname{Im}\int_{Q} \vec{E}^* \hat{\varepsilon} \vec{E}\, dv + \omega Im\,\varepsilon_0 \int_{E_3 \setminus Q} \left|\vec{E}\right|^2 dv +$$

$$\omega \operatorname{Im}\mu_0 \int_{E_3} \left|\vec{H}\right|^2 dv + \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \left(\operatorname{Re}[\vec{E}, \vec{H}^*], \vec{n}\right) dS \qquad (2.5.3)$$

Здесь S_r - сфера радиуса *r*, а $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности сферы; [*,*] обозначает векторное произведение векторов.

Интегральное выражение (2.5.3) является законом сохранения энергии для электромагнитного поля (теорема Пойнтинга).Используя условие излучения на бесконечности можно показать, что поверхностный интеграл в (2.5.3) неотрицателен и имеет физический смысл потока энергии электромагнитного поля на бесконечности. Первый член в левой части и три члена в правой части (2.5.3) имеют физический смысл генерации или потери энергии. Поскольку $\operatorname{Im}\varepsilon_0 \geq 0$, $\operatorname{Im}\mu_0 \geq 0$, то в области $E_3 \setminus Q$ могут быть только потери энергии.

Пусть внешний ток $\vec{J}^0$, создающий внешнее поле, всюду равен нулю, т.е. рассматривается однородная задача. Положим, что Эрмитов тензор $\left(\hat{\varepsilon}(x) - \hat{\varepsilon}^*(x)\right)/(2i)$ неотрицательно определен в каждой точке области *Q*. Это условие имеет следующий физический смысл: в среде, находящейся в области *Q*, не может быть генерации электромагнитной энергии. Из уравнений Максвелла (2.1.1) следует, что поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в области $E_3 \setminus Q$ удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца вида $\Delta \vec{B} + k_0^2 \vec{B} = 0$ и условию излучения на бесконечности. Тогда,принимая во внимание, что последний интеграл в правой части (2.5.3) равен нулю, из основной леммы теории уравнения Гельмгольцаследует, что электромагнитное поле тождественно равно нулю в области $E_3 \setminus Q$.

Далее, из (2.5.3) имеем, что $\vec{E} = 0$ в области *Q*, если Эрмитов тензор $\left(\hat{\varepsilon}(x) - \hat{\varepsilon}^*(x)\right)/(2i)$ положительно определен почти в каждой точке области *Q* (за исключением множества точек меры нуль, в том числе на границе области *Q*).Это условие имеет следующий физический смысл: среда в области *Q* имеет потери электромагнитной энергии. В изотропном случае это условие означает, что $\operatorname{Im}\varepsilon(x) > 0$ для почти всех точек $x \in Q$. Значит, электромагнитное поле равно нулю во всем пространстве E_3, если выполняется *условие А) Эрмитов тензор* $\left(\hat{\varepsilon}(x) - \hat{\varepsilon}^*(x)\right)/(2i)$ *является положительно определенным почти в каждой точке области Q; тензор* $\hat{\varepsilon}(x)$ *является Гельдер непрерывной функцией координат во всем пространстве* E_3.

Рассмотрим случай, когда Эрмитов тензор $\left(\hat{\varepsilon}(x) - \hat{\varepsilon}^*(x)\right)/(2i)$ неотрицательно определен в каждой точке области *Q*, т.е. в среде может не быть затухания. Пусть *P(x,D)* - дифференциальный оператор (вообще говоря, матричный) порядка *n*. Тогда главный символ оператора - матричная функция $P^0(x,\xi)$ - определяется следующим образом. В *P(x,D)* оператор дифференцирования $D = (\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_m)$ заменяется вектором $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$ и в получившейся, полиномиальной по ξ, матрице $P(x,\xi)$ оставляются только члены, имеющие порядок *n*. Условие эллиптичности дифференциального оператора заключается в том, что детерминант $\det P^0(x,\xi) \neq 0$ для всех точек *x* и $\xi, |\xi| \neq 0$.

Из (2.1.1) следует, что главный символ уравнений Максвелла в декартовой системе координат имеет вид $P^0(\xi) = diag(P_1^0, P_1^0)$, где $P_1^0(\xi) = (p_{ij})_{i,j=1}^3$ - матрица с элементами $p_{ii}=0,\ i=1,2,3,\ p_{21}=-p_{12}=\xi_3,\quad p_{13}=-p_{31}=\xi_2,\quad p_{32}=-p_{23}=\xi_1$.

Нетрудно видеть, что $\det P^0(\xi)=\left[\det P_1^0(\xi)\right]^2=0$. Значит дифференциальный оператор Максвелла (2.1.1) не является эллиптическим.

Рассмотрим уравнения Максвелла для однородной среды, т.е. всюду имеем $\hat{\varepsilon}=\varepsilon_0\hat{I},\ \hat{\mu}=\mu_0\hat{I}$. Тогда уравнения (2.1.1) можно преобразовать к виду

$$\Delta\vec{E}+k_0^2\vec{E}=-i\omega\mu_0\vec{J}^0-\frac{i}{\omega\varepsilon_0}grad\ div\ \vec{J}^0,\ \Delta\vec{H}+k_0\vec{H}=-rot\ \vec{J}^0 \tag{2.5.4}$$

Очевидно, что дифференциальный оператор (2.5.4) является эллиптическим. Значит можно предположить, что при определенных условиях, накладываемых на параметры среды $\hat{\varepsilon}(x)$, уравнения Максвелла преобразуются в дифференциальные уравнения, оператор которых является эллиптическим.

Будем считать, что тензор-функция $\hat{\varepsilon}(x)$ - всюду трижды непрерывно дифференцируемая функция координат. Из (2.1.1) следует

$$div\,\hat{\varepsilon}\,\vec{E}=-i\omega^{-1}div\,\vec{J}^0,\quad \mu_0 div\,(\vec{H})=0 \tag{2.5.5}$$

Из (2.5.5) имеем

$$grad\,div\,(\hat{\varepsilon}\vec{E})=-i\omega^{-1}grad\,div\,\vec{J}_E^0,\ \ \mu_0 grad\,div\,(\vec{H})=0 \tag{2.5.6}$$

Записывая левую часть (2.5.6) в декартовой системе координат и в покомпонентном виде, получим очевидную цепочку равенств

$$[grad\,div\,(\hat{\varepsilon}\vec{E})]_k=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\varepsilon_{lm}}{\partial x_l}E_m\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\varepsilon_{lm}\frac{\partial E_m}{\partial x_l}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\varepsilon_{lm}}{\partial x_l}E_m\right)+\frac{\partial\varepsilon_{lm}}{\partial x_k}\frac{\partial E_m}{\partial x_l}+\varepsilon_{lm}\frac{\partial^2 E_m}{\partial x_k\partial x_l},\ k=1,2,3. \tag{2.5.7}$$

В (2.5.7) суммирование проводится по всем повторяющимся индексам от 1 до 3, например, $\frac{\partial E_l}{\partial x_l}=\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}$.

Аналогично имеем выражение для $[\mu_0 grad\,div\,(\vec{H})]_k$.

Из уравнений (2.1.1) следует

$$\partial E_m/\partial x_k=\partial E_k/\partial x_m+i\omega L_{kmn}\mu_{np}H_p,$$

$$\partial H_m/\partial x_k=\partial H_k/\partial x_m-i\omega L_{kmn}\varepsilon_{np}H_p+L_{kmn}(J^0)_n, \tag{2.5.8}$$

где L_{kmn} - символ Леви-Чивита, который определяется формулой

$$L_{kmn}=\begin{cases}1, & \text{если } kmn=123,231,312,\\ -1, & \text{если } kmn=321,213,132,\\ 0 & \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

Подставляя (2.5.8) в последнее слагаемое (2.5.7) и учитывая (2.5.6), получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно $\vec{E}=(E_1,E_2,E_3)$ и $\vec{H}=(H_1,H_2,H_3)$

$$\varepsilon_{lm}\frac{\partial^2 E_k}{\partial x_l\partial x_m}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\varepsilon_{lm}}{\partial x_l}E_m\right)+\frac{\partial\varepsilon_{lm}}{\partial x_k}\frac{\partial E_m}{\partial x_l}+i\omega\varepsilon_{lm}L_{kmn}\frac{\partial}{\partial x_l}(\mu_{np}H_p)=J_k^1,\ k=1,2,3 \tag{2.5.9}$$

$$\mu_o \frac{\partial^2 H_k}{\partial x_l \partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \mu_{lm}}{\partial x_l} H_m\right) - i\omega \mu_{lm} L_{kmn} \frac{\partial}{\partial x_l}(\varepsilon_{np} E_p) = J_k^2.$$

Здесь

$$J_k^1 = -i\omega^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\right)\left[J_E^0\right]_l, \quad J_k^2 = -\mu_0 L_{klm}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)(J^0)_m$$

Из уравнений (2.5.9), проводя несложные выкладки, следует, что детерминант главного символа дифференциального оператора определяется формулой

$$\det P^0(x,\xi) = \mu_0^3 \, [\sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{lm}(x)\xi_l \xi_m]^3 \qquad (2.5.10)$$

Из (2.5.10) ясно, что $\det P^0(\xi) \neq 0$,если выполняется условие

$$\sum_{n,m=1}^{3} \varepsilon_{nm}(x)\, \xi_n \xi_m \neq 0,\ x \in Q,\ |\,\xi\,| \neq 0 \qquad (2.5.11)$$

Значит, если тензор-функция $\hat{\varepsilon}(x)$ - всюду трижды непрерывно дифференцируемая функция координат и выполняются условия (2.5.11), то уравнения Максвелла преобразуются в систему дифференциальных уравнений с оператором эллиптического типа.

Любое решение однородныхуравнений Максвелла (2.1.1), т.е. $\vec{J}^0 = 0$, удовлетворяет однородным и эллиптическим, в силу (2.5.11),уравнениям (2.5.9). Разделим первые три уравнения на ε_0,а вторые три уравнения на μ_0. Рассмотрим точку x_0, находящуюся вне области *Q*. Тогда в этой точке коэффициенты при вторыхпроизводных полей будут вещественными, а электромагнитное полев окрестности равно нулю (см. вышеизложенное).Далее, в области *Q* все коэффициенты при производных от $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют условиям Гельдера, поскольку параметрысреды - трижды непрерывно дифференцируемые функции координат. Теперь, применяя результаты теории псевдодифференциальных уравнений, получим, что электромагнитное поле равно нулю и в области *Q*.

Значит, однородные уравнения Максвелла (2.1.1), удовлетворяющие условиям излучения, имеют только тривиальное решение ($\vec{E}, \vec{H} = 0$) во всем пространстве, если выполняются следующие *условия B: Эрмитов тензор* $\left(\hat{\varepsilon}(x) - \hat{\varepsilon}^*(x)\right)/(2i)$ *является неотрицательно определенным в каждой точке области Q; выполняется условие (2.5.11); тензор* $\hat{\varepsilon}(x)$ *является трижды непрерывно дифференцируемой функцией координат во всем пространстве.*Физический смысл первого условия*B*: в среде не может быть генерации электромагнитной энергии. В изотропном случае это условие означает, что $\mathrm{Im}\,\varepsilon(x) \geq 0$ для всех $x \in Q$.

Отметим, что, в отличие от условия *A*, условие *B* не требует наличия затухания в области *Q*, но при этом тензор функция $\hat{\varepsilon}(x)$ должна иметь большую гладкость.

Таким образом, доказано следующее утверждение: *при выполнении указанных выше условиях A или B решение исходной задачи единственно, если оно существует.*

2.6. Теоремы существования и единственности

Для ответа на вопрос о существовании решения рассматриваемых задач будем использовать результаты функционального анализа.Сначала необходимо выбрать подходящее для анализа функциональное пространство.Интегралы от квадрата модуля характеристик электромагнитного поля присутствуют в законе сохранения (2.5.3). Значит, как и в скалярном случае, можно полагать, что пространство интегрируемых с квадратом вектор функций является наиболее "физичным" для исследования интегральных уравнений задач электромагнитного рассеяния. Ниже будем использовать гильбертово-пространство $\vec{L}_2$ со скалярным произведением, определяемым формулой

$$\left(\vec{U},\vec{V}\right)=\int \vec{U}(x)\vec{V}^*(x)\,dx \qquad (2.6.1)$$

Очевидно, что любая Гельдер непрерывная вектор функция принадлежит $\vec{L}_2$.

2.6.1.Классические решения

Ниже будем считать, что компоненты тензора $\hat{\varepsilon}(x)$ -всюду Гельдер непрерывные функции координат. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение в гильбертовом пространстве вектор функций $\vec{L}_2(E_3)$

$$\vec{E}(x)-k_0^2\int\limits_{E_3}\rho(x)(\hat{\varepsilon}_r-\hat{I})\vec{E}(y)G(R)\,dy-\int\limits_{E_3}\rho(x)\left((\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\vec{E}(y),\mathrm{grad}\right)\mathrm{grad}\,G_0(R)\,dy-$$

$$p.v.\int\limits_{E_3}\left((\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\vec{E}(y),\mathrm{grad}\right)\mathrm{grad}\,G_1(R)\,dy=\vec{E}^0(x),\ x\in E_3 \qquad (2.6.2)$$

В (2.6.2) функции $G_0(R)$ и $G_1(R)$ определяются формулами (2.3.1), а функция $\rho(x)=1$, если $x\in Q$ и $\rho(x)=0$, если $x\in E_3\setminus Q$. Тензор функция $(\hat{\varepsilon}_r(x)-\hat{I})=0$ при $x\in E_3\setminus Q$. Поэтому сингулярные интегральные уравнения (2.6.2) и (2.3.3) эквивалентны в *Q*, т.е. любое решение уравнения (2.6.2) в области *Q* является решением уравнения (2.3.3) и наоборот.

Сингулярное интегральное уравнение (2.6.2) введено для того, чтобы использовать результаты теории сингулярных уравнений. Поскольку функция $\rho(x)$ итензор функция $(\hat{\varepsilon}_r(x)-\hat{I})$ финитны в E_3, топервый и второй интегральные операторы в (2.6.2) являются компактными в гильбертовом пространстве $\vec{L}_2(E_3)$. Значит оператор уравнения (2.6.2) является сингулярным оператором в $\vec{L}_2(E_3)$.Из (3.3.5), (3.3.11), (3.3.12) находим, что элементы символической матрицы $\Phi=\{\Phi_{nm}\}$ сингулярного оператора (2.6.2) имеют следующий вид в декартовой системе координат

$$\Phi_{nm}(x,\beta)=\delta_{nm}+\frac{1}{\varepsilon_0}\beta_n\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{lm}(x)\beta_l-\beta_n\beta_m,\quad n,m=1,2,3. \qquad (2.6.3)$$

Здесь $\varepsilon_{lm}(x)$ - компоненты тензор функции $\hat{\varepsilon}(x)$ в декартовой системе координат.

Из (2.6.3) находим, что

$$\det[\Phi]=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{n,m=1}^{3}\varepsilon_{nm}(x)\,\beta_n\beta_m. \qquad (2.6.4)$$

Теперь, применяя теорему3.3.3для сингулярного интегрального уравнения (2.6.2) и учитывая эквивалентность уравнений (2.3.3) и (2.6.2) в области Q, получим следующее утверждение.

Теорема 2.6.1. *Пусть компоненты тензора $\hat{\varepsilon}(x)$ - всюду в E_3 Гельдер непрерывные функции координат. Тогда, для того, чтобы оператор сингулярного интегрального уравнения(2.3.3) был нетеровым оператором в $\vec{L}_2(Q)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{n,m=1}^{3}\varepsilon_{nm}(x)\,\beta_n\beta_m\neq 0,\ x\in Q,\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1. \qquad (2.6.5)$$

Для изотропной среды условие (2.6.5) принимает вид

$$\varepsilon(x) \neq 0,\ x \in Q.$$

Из теоремы 2.6.1 следует, что условие (2.6.5) является условием обратимости матричного символа. Сингулярный интегральный оператор уравнения (2.3.3) можно рассматривать как псевдодифференциальный оператор. Тогда условие обратимости матричного символа означает, что оператор является эллиптическим. Отметим, что условия эллиптичности уравнений Максвелла (2.5.11) и сингулярного интегрального оператора совпадают, но при этом для дифференциальных уравнений требуется большая гладкость параметров среды.

Используя теорему 3.3.4,можно доказать утверждение.

Теорема 2.6.2. *Пусть выполняются условия теоремы 2.6.1. Тогда оператор интегрального уравнения (2.3.3) будет Фредгольмовым оператором в* $\vec{L}_2(Q)$, *если выполняется условие*

$$\operatorname{Im} \sum_{n,m=1}^{3} \varepsilon_{nm}(x)\, \beta_n \beta_m \geq 0,\ x \in Q,\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1. \tag{2.6.6}$$

Для изотропного случая условие (2.6.6) имеет вид

$$\operatorname{Im} \varepsilon(x) \geq 0. \tag{2.6.7}$$

Условия (2.6.6), (2.6.7) выполняются для любой пассивной среды (нет генерации энергии).

Из утверждения единственности, см. раздел 2.5, теоремы 2.6.2, учитывая определение фредгольмовости, следует теорема существования и единственности решения.

Теорема 2.6.3.*Пусть выполняются условия теоремы 2.6.1, а Эрмитов тензор* $\left(\hat{\varepsilon}(x) - \hat{\varepsilon}^*(x)\right)/(2i)$ *- неотрицательно определен в каждой точке Q. Тогда существует и единственно решение сингулярного интегрального уравнения (2.3.3) в гильбертовом пространстве* $\vec{L}_2(Q)$, *если выполняется одно из следующих условий:*

A) Эрмитов тензор $\left(\hat{\varepsilon}(x) - \hat{\varepsilon}^*(x)\right)/(2i)$ *положительно определен почти в каждой точке области Q;*

B) Тензор функция $\hat{\varepsilon}(x)$ *является трижды непрерывно дифференцируемой функцией координат во всем пространстве.*

Если $\vec{J}^0(x)$ *удовлетворяет условию Гельдера, то решение будет классическим решением исходной задачи рассеяния, т.е. поточечно удовлетворяет уравнениям Максвелла.*

2.6.2.Обобщенные решения

Большой интерес представляют задачи рассеяния, для которых классическая постановка либо затруднена, либо невозможна. К таким задачам, в частности, относится рассеяние на телах с негладкой границей, например параллелепипеде, рассеяние в средах, параметры которых не являются дифференцируемыми функциями координат, например фрактальные среды. Ясно, что в этих случаях соответствующие решения удовлетворяют уравнениям Максвелла в области Qтолько в обобщенном смысле.

Рассмотрим интегральное уравнение (2.3.3), задавая минимальные ограничения на тензор-функцию $\hat{\varepsilon}(x)$, а именно: компоненты тензора в области Q являются ограниченными функциями координат. В этом случае, согласно теореме 3.3.1, линейный оператор интегрального уравнения является ограниченным, а значит и непрерывным.

Запишем интегральное уравнение (2.3.3) в символическом виде

$$\vec{E}-\frac{1}{\varepsilon_0}\hat{S}\Big((\hat{\varepsilon}-\varepsilon_0\hat{I})\,\vec{E}\Big)=\vec{E}^0 \qquad (2.6.8)$$

где $\hat{S}$ - оператор в пространстве $\vec{L}_2(Q)$, вид которого очевиден из (2.3.3). Покажем, что для любого $\vec{J}\in\vec{L}_2(Q)$ выполняется следующее неравенство

$$\mathrm{Im}\frac{1}{\varepsilon_0}\int_Q \vec{J}^*(\hat{S}\vec{J})\,dQ \geq 0. \qquad (2.6.9)$$

Продолжим вектор функцию $\vec{J}\in\vec{L}_2(Q)$ нулем в область $E_3\setminus Q$ и будем рассматривать $\vec{J}$ как сторонний электрический ток в однородном пространстве с параметрами ε_0 и μ_0 Тогда из (2.6.8), (2.3.3), (2.2.4), (2.2.5) следует, что электрическое поле в области Q определяется формулой

$$\vec{E}(x)=-\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\Big(\hat{S}\vec{J}\Big)(x),\; x\in Q \qquad (2.6.10)$$

Пусть $\vec{J}$ - Гельдер непрерывная функция. Тогда электромагнитное поле, определяемое (2.2.4), (2.2.5), удовлетворяет в классическом смысле уравнениям Максвелла для однородной среды и условиям излучения. Тогда из (2.5.3), учитывая, что $\hat{\varepsilon}(x)=\varepsilon_0\hat{I}$, а $\vec{J}=0$ вне области Q, следует

$$-\mathrm{Re}\int_Q \vec{E}^*\vec{J}\,dv=\omega\,\mathrm{Im}\,\varepsilon_0\int_{E_3}\left|\vec{E}\right|^2 dv+\omega\, Im\,\mu_0\int_{E_3\setminus Q}\left|\vec{H}\right|^2 dv+F \qquad (2.6.11)$$

где $F\geq 0$ - поток энергии электромагнитного поля на бесконечности, определяемый последним интегралом правой части (2.5.3). Теперь, подставляя (2.6.10) в (2.6.11), получаем (2.6.9). Далее, любой элемент $\vec{J}\in\vec{L}_2(Q)$ -предел последовательности достаточно гладких вектор функций $\vec{J}_1,\,\vec{J}_2,\ldots$, причем ясно, что для каждого $\vec{J}_m$ справедливо неравенство (2.6.9). Поэтому, рассматривая предельный переход $\vec{J}_m\to\vec{J}$ и учитывая, что оператор $\hat{S}$ непрерывный, получаем, что (2.6.9) имеет место для любых $\vec{J}\in\vec{L}_2(Q)$.

Неравенство (2.6.9) означает, что оператор рассеяния $\hat{S}$ является *диссипативным* оператором.

Теперь докажем следующую теорему существования и единственности решения интегрального уравнения (2.3.3).

Теорема 2.6.4. *Пусть тензор функция $\hat{\varepsilon}(x)$ - ограниченная функция координат в области Q, а Эрмитов тензор $\left(\hat{\varepsilon}(x)-\hat{\varepsilon}^*(x)-2i\,\mathrm{Im}\varepsilon_0\hat{I}\right)/(2i)$ положительно определен в каждой точке Q.Тогда существует и единственно решение сингулярного интегрального уравнения (2.3.3) в Гильбертовом пространстве $\vec{L}_2(Q)$.*

Доказательство. Умножим обе части операторного уравнения (2.6.8) на тензор функцию $(\hat{\varepsilon}-\varepsilon_0\hat{I})^*$ (здесь символ * обозначает сопряжение тензора):

$$(\hat{\varepsilon}-\hat{\varepsilon}_0\hat{I})^*\,\vec{E}\;-(\hat{\varepsilon}-\hat{\varepsilon}_0\hat{I})^*\hat{S}[(\hat{\varepsilon}-\hat{\varepsilon}_0\hat{I})\vec{E}]\;=(\hat{\varepsilon}-\hat{\varepsilon}_0\hat{I})^*\,\vec{E}^0. \quad (2.6.12)$$

Из условия теоремы следует, что тензор функция $\hat{\delta}=(\hat{\varepsilon}-\varepsilon_0\hat{I})$ имеет всюду в Q обратную функцию. Поэтому уравнения (2.6.8) и (2.6.12) являются эквивалентными. Пусть $\hat{A}$ - оператор уравнения (2.6.12). Из (2.6.12) и (2.6.1) имеем для любого $\vec{u}\in\vec{L}_2(Q)$ следующее равенство

$$(\hat{A}\vec{u},\vec{u}) = \int_Q \hat{\delta}^* |\vec{u}|^2 dQ - \int_Q \hat{\delta}^* \hat{S}(\hat{\delta}\vec{u})\vec{u}^* dQ =$$

$$\int_Q \left(\frac{\hat{\delta}+\hat{\delta}^*}{2}\right)|\vec{u}|^2 dQ - i\int_Q \left(\frac{\delta-\delta^*}{2i}\right)|\vec{u}|^2 dQ - \int_Q (\hat{\delta}\vec{u})^* \left[\hat{S}(\hat{\delta}\vec{u})\right] dQ .$$

Тогда из (2.6.9) ясно, что

$$\left|\left(\hat{A}\vec{u},\vec{u}\right)\right| \geq \left|\mathrm{Im}(\hat{A}\vec{u},\vec{u})\right| \geq \min_{x\in Q} \lambda(x)(u,u) = p_0(u,u),\ p_0 > 0 \tag{2.6.13}$$

где $\lambda(x)$ - минимальное собственное число Эрмитова тензора

$$\hat{\delta}_2(x) = \frac{\left(\hat{\delta}(x) - \hat{\delta}^*(x)\right)}{2i} = \frac{\left(\hat{\varepsilon}(x) - \hat{\varepsilon}(x) - 2i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon_0\right)}{2i} \tag{2.6.14}$$

Заметим, что если $\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x)\hat{I}$,т.е. среда – изотропная, то $p_0 = \min_{x\in Q} \mathrm{Im}\left(\varepsilon(x) - \varepsilon_0\right)$.

Теперь, учитывая условия сходимости методаминимальных невязок [5,6]и эквивалентности уравнений (2.6.8) и (2.6.12), следует утверждение теоремы.

Условия теоремы являются более жесткими по сравнению с условиями теоремы 2.6.3 (они практически совпадают с условием *А*, если $\mathrm{Im}\varepsilon_0 = 0$,что имеет место во многих практических задачах). Однако в теореме 2.6.4 не предполагаетсякакой либо гладкости диэлектрической проницаемости. Поэтому в этом случае решение интегрального уравнения (2.3.3) удовлетворяет уравнениям Максвелла в обобщенном смысле.

2.7.Спектр интегрального оператора

Спектром оператора $\hat{A}$ на комплексной плоскости *Z* называется множество таких точек λ, при которых оператор $(\hat{A}-\lambda\hat{I})$ не имеет всюду определенного обратного оператора в Гильбертовом пространстве *H*. Точки λ, при которых оператор $(\hat{A}-\lambda\hat{I})$ не является Нетеровым оператором, принадлежат непрерывной части спектра (essentialspectrum) оператора $\hat{A}$. Точки λ, при которых существует нетривиальное решение *u* уравнения $\hat{A}u - \lambda u = 0$, принадлежат дискретной части спектра оператора $\hat{A}$.

2.7.1.Непрерывная часть спектра

Запишем интегральное уравнение (2.3.3) в символическом виде

$$\hat{A}u \equiv u - \hat{S}\left((\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})u\right) = f. \tag{2.7.1}$$

Очевидно, что

$$\hat{A} - \lambda\hat{I} = (1-\lambda)\left[\hat{I} - \hat{S}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_r - \lambda I}{1-\lambda} - I\right)\right]. \tag{2.7.2}$$

Из теоремы 2.6.1, сравнивая (2.7.1) и (2.7.2), следует, что к непрерывной части спектра оператора уравнения (2.3.3) принадлежит множество точек σ_1 на комплексной плоскости *Z*, определяемое формулой

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{n,m=1}^{3} \varepsilon_{nm}(x)\,\beta_n\beta_m,\ x\in Q,\ \ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1. \tag{2.7.3}$$

Из (2.7.3) ясно, что точка $\lambda = 1$ принадлежит σ_1, поскольку, в силу Гельдер непрерывности, на границе области *Q* тензор диэлектрической проницаемости становится скалярной величиной, т.е. $\varepsilon_{nm} = \delta_{nm}\varepsilon_0$.

Для изотропной среды имеем следующую формулу для точек непрерывного спектра

$$\lambda = \varepsilon_r(x),\ x \in Q\ . \qquad (2.7.4)$$

Обозначим через σ минимальное односвязное множество на комплексной плоскости Z, содержащее множество σ_1. Тогда, из вышеизложенного следует, что односвязное множество $\sigma^+ = Z \setminus \sigma$ будет областью нетеровости оператора $\hat{A}$, т.е. оператор $(\hat{A} - \lambda\hat{I})$ будет нетеров, если $\lambda \in \sigma^+$. Известно, что в каждой связной компоненте области нетеровости операторы $(\hat{A} - \lambda\hat{I})$ имеют один и тот же индекс. Если $\lambda > \|\hat{A}\|$, то оператор $(\hat{A} - \lambda\hat{I})$ имеет всюду определенный ограниченный обратный оператор. Значит, индекс оператора равен нулю и, в силу нетеровости, он будет Фредгольмов, если $\lambda \in \sigma^+$. Таким образом, имеет место утверждение.

Теорема 2.7.1. *Непрерывному спектру оператора интегрального уравнения (2.3.3) принадлежит множество σ_1 на комплексной плоскости, определяемое формулой (2.7.3). Кроме того, оператор $(\hat{A} - \lambda\hat{I})$ будет Фредгольмов, если $\lambda \in \sigma^+ = Z \setminus \sigma$, где σ - минимальное односвязное множество, содержащее множество σ_1.*

Из теоремы 2.7.1 следует, что точки $\lambda \in \sigma^+$ относятся либо к резольвентному множеству спектра оператора $\hat{A}$, либо принадлежат дискретному спектру оператора. В общем случае не представляется возможным достаточно точно описать область локализации дискретного спектра оператора (2.3.3). Однако в одном частном, но практически очень важном случае, это удается сделать.

2.7.2.Спектр оператора для низкочастотного случая

Ниже будем рассматривать задачи низкочастотного рассеяния электромагнитных волн, когда диаметр D области Q значительно меньше длины волны λ, т.е. $D << \lambda$, где $\lambda = 2\pi / k_0$.

Уравнение (2.3.3) имеет смысл при волновом числе $k_0 = 0$, т.е. для статического случая. Это обстоятельство принципиально отличает трехмерные задачи от двумерных задач, для которых стационарные интегральные уравнения не допускают перехода к статическому случаю. Из (2.3.3) следует

$$\left(\hat{A}(k_0) - \hat{A}(0)\right)\vec{V} = -k_0^2 \int_Q (\varepsilon_r - 1)\vec{E}(y) G(R) dy - \int_Q ((\varepsilon_r - 1)\vec{V}(y), \mathrm{grad})\, \mathrm{grad}\ G_0(R) dy \quad (2.7.5)$$

где $\hat{A}(k_0)$ и $\hat{A}(0)$ - операторы интегральных уравнений для стационарного и статического случаев, соответственно, а $G_0(R)$ определяется в (2.3.1). Второй интегральный оператор (2.7.5) не является сингулярным, поскольку ядро этого оператора не имеет особенности, когда x=y, и является гладкой функцией координат. Поэтому из (2.7.5) ясно, что

$$\lim_{k_0 \to 0} \left\| \hat{A}(k_0) - \hat{A}(0) \right\| = 0\ .$$

Значит, имеет место утверждение.

Лемма 2.7.1. *Спектр интегрального оператора низкочастотного рассеяния $\hat{A}(k_0)$ стремится к спектру статического интегрального оператора $\hat{A}(0)$, когда $k_0 \to 0$.*

Для статического случая интегродифференциальное уравнение (2.2.9), которое эквивалентно интегральному уравнению (2.3.3), записывается в следующем виде

$$\vec{E}(x) - \mathrm{grad}\ \mathrm{div} \int\limits_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - 1)\vec{E}(y)(1/4\pi R))\,dy = \vec{E}^0(x) . \qquad (2.7.6)$$

Решение однородного уравнения (2.7.6), т.е. $\vec{E}^0 = 0$, удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0, \quad \mathrm{div}\,(\hat{\varepsilon}_r \vec{E}) = 0 \qquad (2.7.7)$$

Первое уравнение (2.7.7) следует из тождества *rotgrad=0*. Второе уравнение следует из тождества *graddiv=rotrot* + Δ, тождества *divrot=0* и дифференциального уравнения $\Delta\vec{A} = -\vec{J}$, которому удовлетворяет объемный потенциал $\vec{A}(x) = \int \vec{J}(y)(1/4\pi R)dy$.

Из первого уравнения (2.7.7) имеем $\vec{E} = \mathrm{grad}\,\varphi$. Тогда очевидно, что уравнения (2.7.7) сводятся к дифференциальному уравнению второго порядка относительно скалярной функции φ

$$\mathrm{div}\,(\hat{\varepsilon}_r\ \mathrm{grad}\,\varphi) = 0 . \qquad (2.7.8)$$

Пусть ψ - всюду определенная дифференцируемая функция. Имеем очевидное тождество

$$\mathrm{div}\,(\psi\hat{\varepsilon}_r\ \mathrm{grad}\,\varphi) = \psi\,\mathrm{div}\,(\hat{\varepsilon}_r\ \mathrm{grad}\,\varphi) + \mathrm{grad}\,\psi \bullet \hat{\varepsilon}_r\ \mathrm{grad}\,\varphi . \qquad (2.7.9)$$

Положим $\psi = \overline{\varphi}$. Тогда, интегрируя (2.7.9) по всему пространству и учитывая (2.7.8), а также теорему о дивергенции, получим интегральное соотношение

$$\int (\hat{\varepsilon}_r \mathrm{grad}\,\varphi, \mathrm{grad}\,\varphi)d\upsilon = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{S_R} \overline{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS , \qquad (2.7.10)$$

где S_R - сфера радиуса R с центром в начале координат,

n - нормаль к сфере.

Поскольку φ - гармоническая функция вне областиQ, то в окрестности бесконечно удаленной точки $\overline{\varphi}\,\partial\varphi/\partial n$ убывает не медленнее, чем R^{-3}. Значит предел в правой части (2.7.10) равен нулю и любое решение однородного уравнения (2.7.8), а значит и однородного уравнения (2.7.6) с $\vec{E} = grad\,\varphi$,удовлетворяет интегральному соотношению

$$\int (\hat{\varepsilon}_r\ \mathrm{grad}\,\varphi, \mathrm{grad}\,\varphi)d\upsilon = 0 . \qquad (2.7.11)$$

Из (2.7.2), ясно, что λ будет точкой дискретного спектра оператора (2.7.6), если существует ненулевое решение $\varphi(\lambda, x)$ уравнения (2.7.8) с диэлектрической проницаемостью

$$\hat{\varepsilon}_r^+(\lambda, x) = \frac{\hat{\varepsilon}_r(x) - \lambda\hat{I}}{1-\lambda} \qquad (2.7.12)$$

Тогда из (2.7.11), (2.7.12) следует, что соответствующие значения λ определяются формулой

$$\lambda = \frac{\int (\hat{\varepsilon}_r \mathrm{grad}\,\varphi(\lambda), \mathrm{grad}\,\varphi(\lambda))dv}{\int |\mathrm{grad}\,\varphi|^2\, dv} . \qquad (2.7.13)$$

Очевидно, что найти соответствующие функции $\varphi(\lambda, x)$ не представляется возможным. Однако с помощью (2.7.13) можно определить область локализации точек дискретного спектра на комплексной плоскости Z .

Рассмотрим сначала изотропный случай. Тогда из (2.7.13) имеем, что точки дискретного спектра описываются формулой

$$\lambda = \frac{\int \varepsilon_r |\text{grad}\,\varphi|^2\, d\,v}{\int |\text{grad}\,\varphi|^2\, d\,v} \tag{2.7.14}$$

Выражение (2.7.14) напоминает формулу для центра масс плоской фигуры, который может находиться только внутри выпуклой оболочки плоской фигуры. Аналогично можно показать, что значения λ находятся только внутри выпуклой оболочки области значений диэлектрической проницаемости $\varepsilon_r(x),\ x \in Q$, т.е. внутри выпуклой оболочки множества σ_1. Обозначим это множество через σ_0. Очевидно, что $\sigma_0 \supseteq \sigma$ где σ определяется в теореме 2.7.1. Значит, согласно этой теореме, в области $Z \setminus \sigma_0$ могут быть только точки дискретного спектра. Таким образом, получаем

Утверждение А. *Для случая изотропной среды весь спектр оператора (2.7.6), а значит и сингулярного оператора (2.3.3) при* $k_0 = 0$, *находится внутри области* σ_0 *комплексной плоскости.*

Отметим, что область σ_0 зависит только от значений диэлектрической проницаемости, но не зависит от геометрических характеристик области *Q*.

Для анизотропного случая ситуация сложнее, поскольку выражение (2.7.13) носит более запутанный характер. Представим тензор функцию $\hat{\varepsilon}(x)$ в следующем виде

$$\hat{\varepsilon}(x) = \hat{\delta}_1(x) + i\,\hat{\delta}_2(x),\ \ \hat{\delta}_1(x) = \frac{\hat{\varepsilon}(x) + \hat{\varepsilon}^*(x)}{2},\ \hat{\delta}_2(x) = \frac{\hat{\varepsilon}(x) - \hat{\varepsilon}^*(x)}{2i} \tag{2.7.15}$$

Очевидно, что тензоры $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$ являются Эрмитовыми для всех точек $x \in Q$,а значит их собственные числа вещественные. Обозначим через $a^{(1)}_{\min}(x), a^{(1)}_{\max}(x)$ и $a^{(2)}_{\min}(x), a^{(2)}_{\max}(x)$ минимальные и максимальные собственные числа Эрмитовых тензор функций, соответственно, $\hat{\delta}_1(x)$ и $\hat{\delta}_2(x)$. Можно доказать следующее

Утверждение B.*Весь спектр оператора (2.7.6), а значит и сингулярного оператора (2.3.3) при* $k_0 = 0$, *лежит внутри прямоугольника, стороны которого параллельны комплексной плоскости, а левая нижняя и правая верхняя вершины имеют координаты* $(A^{(1)}_{\min}, A^{(2)}_{\min}), (A^{(1)}_{\max}, A^{(2)}_{\max})$, *где*

$$A^{(n)}_{\min} = \min a^{(n)}_{\min}(x),\ \ A^{(n)}_{\max} = \max a^{(n)}_{\max}(x),\ x \in Q,\ n = 1,2.$$

Отметим, что утверждение *B* дает менее точную информацию об области локализации спектра, по сравнению с изотропным случаем. Из утверждений *A* и *B* следует, что если среда не имеет потерь, то весь спектр оператора находится вблизи отрезка на действительной оси комплексной плоскости.

Лемма 2.7.1 устанавливает возможность использования полученной информации о спектре для задач низкочастотного рассеяния, которая имеет большое значение при построении эффективных численных методов и алгоритмов решения.

2.7.3.Пример

Пусть область *Q*в уравнении (2.3.3) – шар и положим, что функция диэлектрической проницаемости (рассматривается изотропный случай)имеет следующий вид в сферической системе координат

$$\frac{\varepsilon(r)}{\varepsilon_0}=\begin{cases}\varepsilon_2,\ d_2\ge r\ge 0\\ \varepsilon_2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\dfrac{r-d_2}{d_1-d_2},\ d_1\ge r\ge d_2\\ \varepsilon_1+(1-\varepsilon_1)\dfrac{r-d_1}{R-d_1},\ R\ge r\ge d_1\end{cases}\qquad(2.7.15)$$

В (2.7.15) R – радиус шара, а $R>d_1>d_2>0$.

На рис. 2.7.1 сплошная линия схематически показывает точки непрерывной части спектра, а весь спектр оператора в низкочастотном случае лежит внутри треугольника.

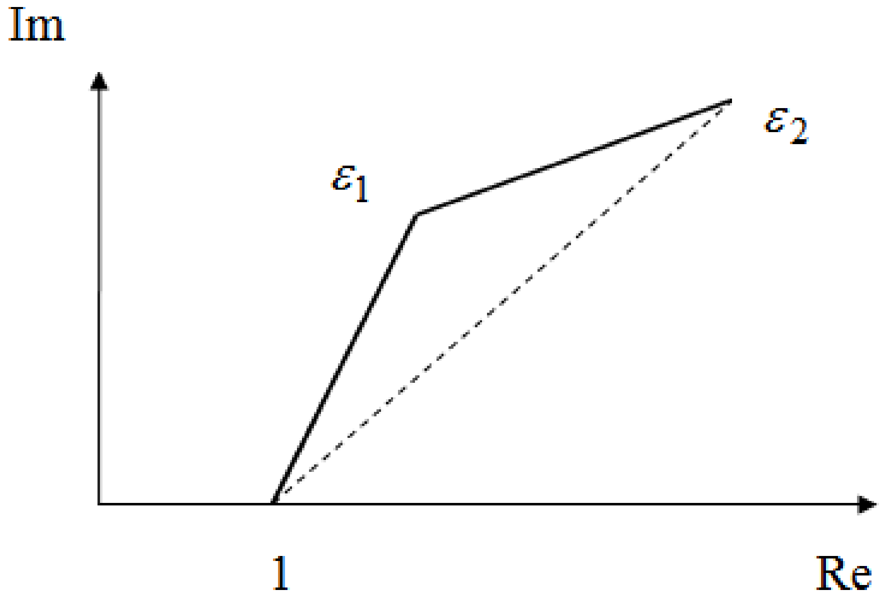

Рисунок 2.7.1.Спектр интегрального оператора.

3. Некоторые результаты математического анализа
3.1.Некоторые понятия функционального анализа

Определение. *Множество X называется линейным пространством, если для двух любых элементов u и v из X определена их сумма(u+v), которая также является элементом множества X. Также для каждого элемента* $u\in X$ *и числа* λ *определено произведение* λu, *которое является элементом X. Кроме того, эти операции удовлетворяют следующим свойствам:*

1. $(u+v)+f=u+(v+f)$, $u,v,f\in X$;

2. $u+v=v+u$;

3.В X существует нулевой элемент θ *такой, что для любого* $u\in X$ *имеем* $0u=\theta$ $u+\theta=u$;

4. $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$;

5. $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$;

6. $(\lambda\mu)u=\lambda(\mu u)$;

7. 1u=u.

Определение. *Линейное пространство X называется линейным нормированным пространством, если каждому элементу* $u \in X$ *поставлено в соответствие вещественное число* $\|u\|$, *называемое нормой элемента, которое удовлетворяет следующим свойствам:*

$$\|u\| \geq 0\,; \|u\| = 0 \text{ только если } u = \theta\,; \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|\,; \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Здесь u, v – любые элементы X, α *- любое число.*

Если любая фундаментальная последовательность $v_m,\ m = 1,2,...$ нормированного линейного пространства *X* имеет предел $v \in X$, то пространство называется *полным пространством* (*банаховым пространством*).

Определение. *Пусть B –банахово пространство. Пусть любому элементу* $u \in B$ *по некоторым правилам ставится в соответствие элемент* $v \in B$, *т.е.* $v = Au$. *Правило A называется линейным оператором в B, если для любых* $x, y \in B$ *и чисел* λ, μ *имеем*

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay.$$

Определение. *Оператор A называется ограниченным оператором в банаховом пространств B, если существует действительное число C такое, что для любого* $u \in B$ *имеем* $\|Au\| \leq C\,\|u\|$.

Минимальное значение таких чисел *C* называется нормой $\|A\|$ линейного оператора.

Если линейный оператор ограниченный, то он является непрерывным. Это значит, что если $v = \lim v_m,\ m \to \infty$, то

$$\lim Av_m = Av,\ m \to \infty.$$

Если в банаховом пространстве *B* для любых элементов $u, v \in B$ можно определить скалярное произведение (u,v) со следующими свойствами:

$$(u+v, w) = (u,w) + (v,w), \quad (\alpha u, v) = \alpha(u,v), \quad (u,v) = (v,u)^*,$$
$$(u,u) \geq 0, \quad (u,u) = 0 \text{ если и только если } u = \theta,$$

то мы имеем *гильбертово пространство*. В этом случае $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$.

Для гильбертова пространства $L_2(Q)$ интегрируемых с квадратом функций определяется скалярное произведение

$$(u,v) = \int_Q u(x) v(x)^* dx. \tag{3.1.1}$$

Рассмотрим линейный интегральный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$ (*Q*– ограниченная область в эвклидовом пространстве E_3), который имеет следующий вид

$$(Au)(x) = \int_Q \frac{K(x,y)}{R^m} u(y) dy,\ x \in Q. \tag{3.1.2}$$

Здесь $K(x,y)$ - ограниченная функция координат *x* и *y*, $R = |x - y|$, и $3 > m \geq 0$. Если $3 > m > 0$, то мы имеем слабо сингулярный интегральный оператор. Все такие операторы являются ограниченными в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$.

Дадим несколько определений.

Определение. *Пусть A – линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Тогда оператор* A^**,который также определен в H, называется сопряженным к A,если следующее равенство*

$$(A f, g) = (f, A^* g)$$

выполняется для всех $f, g \in H$.

Решения однородного уравнения $Au = 0$ будем называть нулями оператора*A*. Обозначим размерность подпространства нулей через $n(A)$. Тогда $n(A^*)$ - размерность подпространства нулей сопряженного оператора A^*. Разность

$$\operatorname{Ind} A = n(A) - n(A^*)$$

называется индексом оператора*A*.

Определение. *Линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, называется нормально разрешимым, если область всех значений оператора A является ортогональным дополнением к подпространству нулей сопряженного оператора* A^*.

Значит, если*A* – нормально разрешимый оператор, то *Au=f* имеет решение, если и только если правая часть*f*ортогональна всем нулям сопряженного оператора A^*.

Определение. *Линейный оператор A называется нетеровым оператором, если он нормально разрешим и его индекс конечен.*

Определение. *Линейный оператор A называется фредгольмовым оператором, если он нетеров и его индекс равен нулю.*

Из вышеприведенных определений вытекает, что если оператор *A* – фредгольмов, то для существования и единственности решения уравнения *Au=f*д ля любого $f \in H$ достаточно, чтобы однородное уравнение $Av = 0$ имело только нулевое решение.

Отметим, что в аглоязычной литературе нетеров оператор называется фредгольмовым, а фредгольмов оператор называется фредгольмовым оператором с нулевым индексом.

Определение. *Множество K, принадлежащее банаховому пространству B (в частности гильбертову пространству), является компактным, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует конечное множество элементов* $x_1, ..., x_n \in B$, $n = n(\varepsilon)$, *что для каждого элемента* $x \in K$ *найдется элемент* x_k *такой что* $\| x - x_k \| < \varepsilon$.

Определение. *Линейный операторK, действующий в гильбертовом пространстве H, называется компактным оператором, если для любого ограниченного множества* $M \subset H$ *образ K(M)- компактное множество.*

Операторы вида $(I + K)$, где I – единичный оператор в *H,* являются фредгольмовыми операторами.

Линейный интегральный оператор вида (3.1.2) является компактным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$, если $m < 3$.Рассмотрим уравнение, которое называется интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода

$$u(x) + \int_Q \frac{K(x,y)}{R^m} u(y)\, dy = f(x), \;\; x \in Q, \quad m < 3. \qquad (3.1.3)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема3.1.1.*Для любого* $f \in L_2(Q)$ *существует и единственно решение интегрального уравнения (3.1.3) в* $L_2(Q)$, *если однородное уравнение* ($f = 0$) *имеет только нулевое решение.*

3.2.Производные слабо сингулярного интеграла

Рассмотрим следующее интегральное выражение в декартовой системе координат, которое имеет большое значение для многих приложений

$$V(x) = \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_m}\int_Q \frac{U(y)}{|x-y|}dy,\ n,m = 1,2,3, \tag{3.2.1}$$

где функция $U(x)$ равна нулю вне областиQ.

Из (3.2.1) имеем

$$V(x) = \frac{\partial}{\partial x_n}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_m}\left[\frac{1}{|x-y|}\right]U(y)\,dy = -\frac{\partial}{\partial x_n}\int_Q |x-y|^{-2}\frac{(x_m - y_m)}{|x-y|}U(y)\,dy \tag{3.2.2}$$

В приведенном выражении вторую производную нельзя внести под знак интеграла, поскольку тогда появиться член $\sim |x-y|^{-3}$ и соответствующий интеграл потеряет смысл. Обозначим

$$\alpha_m = \frac{x_m - y_m}{|x-y|} \tag{3.2.3}$$

Имеем очевидное равенство

$$-\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\alpha_m}{|x-y|^2}\right) = \frac{1}{|x-y|^3}\left(3\alpha_n\alpha_m - \delta_{nm}\right), \tag{3.2.4}$$

где δ_{nm} - символ Кронекера,

$\alpha_n, n = 1,2,3$ - декартовые координаты точек единичной сферы S. В сферической системе координат

$$\alpha_1 = \sin\theta\cos\varphi,\ \alpha_2 = \sin\theta\sin\varphi,\ \alpha_3 = \cos\theta. \tag{3.2.5}$$

Ниже будет введено понятие *сингулярного интеграла* применительно к выражению (3.2.2). Математический трюк, который будем использовать для корректного вычисления (3.2.2) состоит в том, что область интегрирования разбивается на две части: одна часть имеет сингулярную особенность в окрестности точки x=y, а вторая нет. А именно, для каждого фиксированногоxпредставим (3.2.2) как сумму двух интегралов:

$$V(x) = \frac{\partial}{\partial x_n}\int_{Q\setminus|x-y|<\varepsilon}\left[\frac{-\alpha_m}{|x-y|^2}\right]U(y)\,dy + \frac{\partial}{\partial x_n}\int_{|x-y|<\varepsilon}\left[\frac{-\alpha_m}{|x-y|^2}\right]U(y)\,dy.$$

Далее, беря предел $\varepsilon \to 0$,получим

$$V(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial x_n}\int_{Q\setminus|x-y|<\varepsilon}\left[\frac{-\alpha_m}{|x-y|^2}\right]U(y)\,dy + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial x_n}\int_{|x-y|<\varepsilon}\left[\frac{-\alpha_m}{|x-y|^2}\right]U(y)\,dy. \tag{3.2.6}$$

Заметим, что для любого $\varepsilon \neq 0$ первый интеграл не содержит особенность и мы можем подставить (3.2.4) в подинтегральное выражение. Сначала рассмотрим второй интеграл (3.2.6). Добавим и вычтем$U(x)$ под знаком интеграла

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|<\varepsilon}\left\{\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{-\alpha_m}{|x-y|^2}\right\}\left[U(y) - U(x) + U(x)\right]dy =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|<\varepsilon}\left\{\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{-\alpha_m}{|x-y|^2}\right]\right\}[U(y)-U(x)]dy+\lim_{\varepsilon\to 0}U(x)\int\limits_{|x-y|<\varepsilon}\left\{\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{-\alpha_m}{|x-y|^2}\right]\right\}dy\,. \qquad (3.2.7)$$

Определение. *Функция U называется Гельдер непрерывной в области D, если неравенство*

$$|u(y)-u(x)|\le C|x-y|^{\delta},\quad C=\mathrm{const},1\ge\delta>0$$

выполняется для любых $x,y\in D$.

Будем полагать, что функция $U(x)$ - Гельдер непрерывная в области Q.

Первый интеграл в правой части выражения (3.2.7) содержит разность $[U(y)-U(x)]$. Тогда получим

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|<\varepsilon}\left\{\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{-\alpha_m}{|x-y|^2}\right]\right\}[U(y)-U(x)]dy\right|\le C\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|<\varepsilon}\left|\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{-\alpha_m}{|x-y|^2}\right]\right||x-y|^{\delta}dy=$$

$$C\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|<\varepsilon}\frac{|3\alpha_n\alpha_m-\delta_{nm}|}{|x-y|^{3-\delta}}dy=0 \qquad (3.2.8)$$

Интеграл (3.2.8) обращается в нуль, поскольку под знаком интеграла стоит слабая особенность ($3-\delta<3$), а область интегрирования стремится в пределе к нулю.

Последний интеграл (3.2.7) преобразуем следующим образом. Используя теорему Гаусса и принимая во внимание, что область интегрирования – шар со сферической границей S_ε и нормалью к границе $\upsilon_n=-\alpha_n$, получим:

$$U(x)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|<\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{-\alpha_m}{|x-y|^2}\right]dy=U(x)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|<\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_n}\left[\frac{\alpha_m}{|x-y|^2}\right]dy=$$

$$U(x)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{y\in S_\varepsilon}\frac{\upsilon_n\alpha_m}{|x-y|^2}dS=U(x)\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{-\alpha_n\alpha_m}{\varepsilon^2}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=-U(x)\frac{4\pi}{3}\delta_{nm}. \qquad (3.2.9)$$

Таким образом, из (3.2.6)-(3.2.9) получаем следующее выражение для двух частных производных от интеграла со слабой особенностью (3.2.1)

$$V(x)=\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_m}\int\limits_Q\frac{U(y)}{|x-y|}dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q\setminus|x-y|<\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^3}[3\alpha_n\alpha_m-\delta_{nm}]U(y)dy-\frac{4\pi}{3}U(x)\delta_{nm} \qquad (3.2.10)$$

Теперь покажем, что предел интеграла в выражении (3.2.10) существует. Пусть $\Omega(x)$ - шар с центром в точке $x\in Q$, $Q\subset\Omega(x)$. Поскольку функция $U(x)$ отлична от нуля только в области Q, имеем для всех $x\in Q$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q\setminus|x-y|<\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^3}[3\alpha_n\alpha_m-\delta_{nm}]U(y)dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega(x)\setminus|x-y|<\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^3}[3\alpha_n\alpha_m-\delta_{nm}]U(y)dy=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega(x)\setminus|x-y|<\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^3}[3\alpha_n\alpha_m-\delta_{nm}][U(y)-U(x)]dy+$$

$$U(x)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega(x)\setminus|x-y|<\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^3}[3\alpha_n\alpha_m-\delta_{nm}]dy\;. \qquad (3.2.11)$$

Сначала вычислим последний интеграл (3.2.11), используя сферическую систему координат с центром в точке x. Получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega(x)\setminus|x-y|<\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^3}\left[3\alpha_n\alpha_m-\delta_{nm}\right]dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{1}{\mathrm{r}}\left[\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[3\alpha_n\alpha_m-\delta_{nm}\right]\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\right]dr,\quad 3.2.12)$$

где R - радиус шара $\Omega(x)$. Из (3.2.5) очевидно, что интеграл (3.2.12) равен нулю.

Рассмотрим первый интеграл в последнем выражении (3.2.11). Поскольку $U(x)$ - Гельдер непрерывная функция, получим

$$\left[U(y)-U(x)\right]=\varphi(x,y)|x-y|^{\delta},$$

где $\varphi(x,y)$ - ограниченная функция координат. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega(x)\setminus|x-y|<\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^3}\left[3\alpha_n\alpha_m-\delta_{nm}\right]\left[U(y)-U(x)\right]dy=$$

$$\int\limits_{\Omega(x)}\frac{1}{|x-y|^{3-\delta}}\left[3\alpha_n\alpha_m-\delta_{nm}\right]\varphi(x,y)\,dy. \qquad (3.2.13)$$

Интеграл (3.2.13) существует в обычном смысле. Этот интеграл называется *сингулярным интегралом* (в смысле главного значения) и обозначается символом (*p.v.*)

$$p.v.\int\limits_Q\frac{1}{|x-y|^3}\left[3\alpha_n\alpha_m-\delta_{nm}\right]U(y)\,dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q\setminus|x-y|<\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^3}\left[3\alpha_n\alpha_m-\delta_{nm}\right]U(y)\,dy \quad (3.2.14)$$

3.3.Элементы теории сингулярных уравнений

Пусть *Q*– область в пространстве E_3.Эта область может быть конечной, бесконечной и, в частности, совпадать с пространством E_3.Будем рассматривать сингулярные интегралы вида

$$V(x)=p.v.\int\limits_Q u(y)\frac{f(y,\alpha)}{R^3}dy=\lim\int\limits_{Q\setminus(R<\varepsilon)}u(y)\frac{f(y,\alpha)}{R^3}dy. \qquad (3.3.1)$$

Здесь $R=|x-y|$ - расстояние между точками *x* и *y*, а $\alpha=(x-y)/R$ - точки на единичной сфере*S*.

Точка *x* называется полюсом сингулярного интеграла, функция $f(x,\alpha)$ - характеристикой, а *u*(*y*) плотностью.

Во всем последующем изложении, будем полагать, что характеристика удовлетворяет условию

$$\int\limits_S f(x,\alpha)\,dS=0. \qquad (3.3.2)$$

Можно убедиться, что интеграл (3.3.1) не существует, если условие (3.3.2) не выполняется.

Ниже будем рассматривать сингулярные интегралы как операторы в гильбертовом пространстве $L_2(E_3)$.

Теорема3.3.1.*Пусть характеристика* $f(x,\alpha)$ *удовлетворяет условию (3.3.2), а неравенство*

$$\int\limits_S|f(x,\alpha)|^2dS\le C=\mathrm{const} \qquad (3.3.3)$$

справедливо для всех точек x. Тогда, если $u\in L_2(E_3)$ *,сингулярный интеграл (3.3.1) существует для почти всех точек* $x\in E_3$ *; кроме того,* $v\in L_2(E_3)$ *, а сингулярный оператор* *является ограниченным в пространстве* $L_2(E_3)$.

Определение. *Сингулярным оператором в гильбертовом пространстве* $L_2(E_3)$ *будем называть линейный оператор* $\hat{A}$*, который определяется следующим образом*

$$(\hat{A}u)(u) = a(x)u(x) + p.v.\int_{E_3} \frac{f(y,\alpha)}{R^3} u(y)d(y) + (\hat{K}u)(x), \qquad (3.3.4)$$

где $\hat{K}$ *- компактный операторов* $L_2(E_3)$.

Ниже будем полагать, что характеристика – всюду Гельдер непрерывная функция по отношении к x и $f(x,\alpha)=0$,если $x \in E_3 \setminus Q$, где Q - ограниченная область в пространстве E_3

Исследование линейных уравнений с сингулярным оператором (3.3.4) значительно сложнее, чем для случая линейных уравнений с фредгольмовым оператором. Поэтому соответствующая теория для сингулярных уравнений разработана значительно позже и менее детально.

Сингулярные интегральные уравнения анализируются с использованием понятия символа сингулярного оператора $\hat{A}$.Символ оператора определяется как алгебраическая функция $\Phi_A(x,\beta)$ точек $x \in E_3$ и $\beta \in S$, где *S*– единичная сфера. Символ должен удовлетворять, в частности, следующим трем условиям:

(I) символ любого компактного оператора равен нулю;

(II) символ суммы двух сингулярных операторов равен сумме их символов;

(III) символ произведения двух сингулярных операторов равен произведению их символов.

Символ сингулярного оператора может быть определен различными эквивалентными формулами. Мы будем использовать одну из них, которая наиболее удобна для исследования рассматриваемых во второй главе сингулярных интегральных уравнений.

Для многих приложений характеристика может быть представлена в следующем виде $f(x,\alpha) = f_1(x)\, f_2(\alpha)$.Тогда символ сингулярного интегрального оператора (3.3.4) определим формулой

$$\Phi_A(x,\beta) = a(x) + f_1(x)\frac{F\left[p.v.\int_{E_3} \frac{f_2(\alpha)}{R^3} u(y)\,dy\right]}{F[u(x)]}; \quad \beta = \frac{k}{|k|}, \qquad (3.3.5)$$

где *F* обозначает преобразование Фурье

$$F[v(x)]_{(k)} = \int_{E_3} \exp(ikx)v(x)\,dx \qquad (3.3.6)$$

Здесь $kx = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$, а $dx = dx_1dx_2dx_3$.

Во многих случаях, в частности рассмотренных в разделе2, сингулярные интегралы являются результатом дифференцирования интегралов со слабой особенностью

$$V(x) = \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_m}\int_Q u(y)\frac{f(y)}{R}\,dy \qquad (3.3.7)$$

Тогда из (3.2.10), (3.2.14) получим

$$V(x) = p.v.\int_Q u(y)\frac{f(y)(3\alpha_n\alpha_m - \delta_{nm})}{R^3}\,dy - \frac{4\pi}{3} f(x)u(x)\delta_{nm} \qquad (3.3.8)$$

Функция $V_0(x) = \int\limits_{E_3} \frac{1}{4\pi R} U(y)\, dy$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta V_0 = -U$.

Имеем очевидные преобразования

$$F\left[\Delta \int\limits_{E_3} \frac{1}{4\pi R} U(y)\, dy\right] = -|k|^2 F\left[\int\limits_{E_3} \frac{1}{4\pi R} U(y)\, dy\right] = F[-U],$$

$$F\left[\int\limits_{E_3} \frac{1}{4\pi R} U(y)\, dy\right] = \frac{F(U)}{|k|^2}, F\left[\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_m}\int\limits_{E_3} \frac{1}{4\pi R} U(y)\, dy\right] = -\frac{k_n k_m}{|k|^2} F[U] = -\beta_n \beta_m F[U]. \quad (3.3.10)$$

Окончательно, из (3.3.5)-(3.3.10), находим, что символ сингулярного оператора

$$(\hat{A}_0 u)(x) = p.v.\int\limits_Q u(y) \frac{f(y)(3\alpha_n \alpha_m - \delta_{nm})}{R^3} dy \quad (3.3.11)$$

имеет следующее представление

$$symbol(\hat{A}_0) = \Phi_0(x,\beta) = -4\pi f(x)\beta_n \beta_m + \frac{4\pi}{3} f(x)\delta_{nm}. \quad (3.3.12)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема3.3.2. *Пусть $\hat{A}$ -сингулярный оператор вида (3.3.4). Тогда для того, чтобы $\hat{A}$ был фредгольмовым оператором в пространстве $L_2(E_3)$ необходимо и достаточно, чтобы его символ не вырождался, т.е.*

$$\inf_{x\in E_3, \beta\in S} \left|\Phi(x,\beta)\right| > 0. \quad (3.3.13)$$

Теперь рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений вида

$$\sum_{m=1}^{3} \hat{A}_{nm} u_m = f_n; \quad n = 1,2,3, \quad (3.3.14)$$

где $u_n, f_n \in L_2(E_3)$, $\hat{A}_{nm}$ - сингулярные интегральные операторы вида (3.3.4).

Система (3.3.14) может быть представлена как векторное операторное уравнение

$$\hat{A}\vec{u} = \vec{f}. \quad (3.3.15)$$

Здесь $\vec{u}$ и $\vec{f}$ - вектор функции, а

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (3.3.16)$$

является матричным сингулярным оператором.

Определим символ оператора $\hat{A}_{nm}$ как $\Phi_{nm}(x,\beta)$. Матричную функцию

$$\Phi(x,\beta) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x,\beta) & \Phi_{12}(x,\beta) & \Phi_{13}(x,\beta) \\ \Phi_{21}(x,\beta) & \Phi_{22}(x,\beta) & \Phi_{23}(x,\beta) \\ \Phi_{31}(x,\beta) & \Phi_{32}(x,\beta) & \Phi_{33}(x,\beta) \end{pmatrix} \quad (3.3.17)$$

будем называть матричным символом или просто символом матричного оператора.

Ниже будем рассматривать сингулярное уравнение (3.3.15) в гильбертовом пространстве интегрируемых с квадратом вектор функций $\vec{L}_2(E_3)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{n=1}^{3} \int\limits_{E_3} u_n(x) v_n(x)^* dx \quad (3.3.18)$$

Теорема3.3.3. *Пусть* $\hat{A}$ *- матричный сингулярный интегральный оператор вида (3.3.4),(3.3.16). Тогда для того, чтобы* $\hat{A}$ *был нетеровым оператором в пространстве* $\vec{L}_2(E_3)$ *необходимо и достаточно, чтобы его матричный символ не вырождался, т.е.*

$$\inf_{x\in E_3,\beta\in S}\left|\det\Phi(x,\beta)\right|>0 \qquad (3.3.19)$$

В отличие от случая скалярного сингулярного интегрального уравнения индекс системы уравнений (3.3.14) может не быть равным нулю.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия фредгольмовости системы сингулярных интегральных уравнений (3.3.14).

Теорема3.3.4. *Пусть* $\hat{A}$ *- матричный сингулярный оператор, удовлетворяющий условиям теоремы 3.3.3. Тогда* $\hat{A}$ *будет фредгольмовым оператором в пространстве* $\vec{L}_2(E_3)$, *если существует гладкая кривая на комплексной* λ *-плоскости, соединяющая точки* $\lambda=0$ *и* $\lambda=\infty$ *и не имеющая общих точек с множеством собственных чисел символической матрицы.*

В теореме 3.3.4 множество собственных чисел символической матрицы на комплексной плоскости определяется из условия

$$\det\left[\lambda I-\Phi(x,\beta)\right]=0,\ x\in E_3,\ \beta\in S \qquad (3.3.20)$$

4. Заключение

В заключении отметим, что могут быть построены эффективные методы и алгоритмы численного решения объемных сингулярных интегральных уравнений, описывающих рассмотренные выше задачи. На первый взгляд дифференциальные уравнения с частными производными кажутся более подходящими для численного решения, поскольку после дискретизации мы получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженной матрицей по сравнению с полной матрицей, которую получаем в случае интегральных уравнений. Однако для задач рассеяния решение должно удовлетворять условию излучения на бесконечности. Это приводит к тому, что для получения достаточной точности необходимо численно находить неизвестное волновое поле в области, которая значительно больше рассеивающей области *Q*. Поэтому, принимая во внимание трехмерность исходной задачи, при использовании дифференциальных уравнений получаем СЛАУ огромной размерности. Используя алгоритмы быстрого дискретного преобразования Фурье и учитывая, что ядра интегральных уравнений зависят только от разности аргументов, мы конструируем быстрые алгоритмы умножения матрицы СЛАУ на вектор. Затем, используя итерационные методы, можно построить эффективные алгоритмы численного решения исходных задач на основе интегральных уравнений[6].

Литература

1. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. – М.: Наука, 1987. – 234с.
2. Забрейко П.П., Кошелев А.И. и др. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 448с.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. - 741с.
4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710с.
5. Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном

рассеянии. – М.: Радио и связь, 1998. – 160с.
6. Самохин А.Б. Объемные интегральные уравнения математической физики: методы и алгоритмы решения. – М.: МИРЭА, 2011. –96с.
7. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – М.: Мир, 1986. – 696с.