

Качественный анализ динамики ближнего поля вибратора конечной длины

В.А.Пермяков, Д.В. Сороковик

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ»
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная 14, E-mail: valerypermyakov@yandex.ru

Методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений применены к анализу эволюции электромагнитных полей вблизи линейного вибратора конечной длины.

The methods of qualitative theory of ordinary differential equations to analysis of electromagnetic fields evolution near the line vibrator of finite length are applied.

Электромагнитные поля излучателей в свободном пространстве описываются линейными уравнениями Максвелла. Однако силовые линии полей и вектора Пойнтинга определяются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Применение методов качественной теории ОДУ к анализу эволюции электромагнитных полей антенн представляется привлекательным с той точки зрения, что качественный анализ един для любых видов возбуждения антенн: гармоническими и негармоническими токами. Другое ценное свойство качественного анализа – определение условий структурной перестройки (бифуркаций) силовых линий полей, которые при численном исследовании полей с дискретным шагом во времени могут быть пропущены.

Возможности качественного анализа были продемонстрированы на примерах изучения эволюции силовых линий полей электрического диполя и элемента Гюйгенса [1-3]. Применение качественных методов к анализу полей вблизи тонкого вибратора конечной длины при гармоническом возбуждении обсуждалось в [4], однако результаты [4] потребовали дополнения для вибраторов с длиной плеча $L > \lambda/4$.

Рассмотрим тонкий электрический вибратор, возбуждаемый гармоническим током. Вибратор направлен вдоль оси z цилиндрической системы координат r, φ, z , центр которой совмещен с центром вибратора. Длина вибратора $2L$ может быть соизмерима с длиной волны λ . В приближении заданного тока примем синусоидальное распределение комплексной амплитуды тока вдоль вибратора

$$\dot{I}(z) = \dot{I}_0 \frac{\sin k(L-z)}{\sin(kL)}, \quad (1)$$

соответствующее первому приближению интегрального уравнения Халлена[5,6]. Для описания поля в пространстве – времени перейдем к мгновенным значениям электрического поля вибратора в цилиндрической системе координат

$$E_z = A \left(\frac{\sin(\omega t - kR_1)}{R_1} + \frac{\sin(\omega t - kR_2)}{R_2} - 2\cos(kL) \frac{\sin(\omega t - kR_0)}{R_0} \right) \quad (2)$$
$$E_r = \frac{-A}{r} \left(\frac{(z-L)\sin(\omega t - kR_1)}{R_1} + \frac{(z+L)\sin(\omega t - kR_2)}{R_2} - 2\cos(kL) \frac{z\sin(\omega t - kR_0)}{R_0} \right)$$

В (1) - (2) приняты следующие обозначения

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (z-L)^2}, \quad R_2 = \sqrt{r^2 + (z+L)^2}, \quad R_0 = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad (3)$$

$A = 30I_0 / \sin(kL)$, I_0 – модуль тока в точке питания.

Дифференциальное уравнение силовых линий электрического поля вибратора в цилиндрической системе координат (ЦСК) имеет вид

$$\frac{dz}{dr} = \frac{E_z}{E_r} = \frac{P(r, z, \tau)}{Q(r, z, \tau)}, \quad (4)$$

где

$$P = r \left(\frac{\sin(\omega t - kR_1)}{R_1} + \frac{\sin(\omega t - kR_2)}{R_2} - 2 \cos(kL) \frac{\sin(\omega t - kR_0)}{R_0} \right) \quad (5)$$

$$Q = \frac{(z-L) \sin(\omega t - kR_1)}{R_1} + \frac{(z+L) \sin(\omega t - kR_2)}{R_2} - 2 \cos(kL) \frac{z \sin(\omega t - kR_0)}{R_0}. \quad (6)$$

Функциями (5,6) определяется и уравнение для траекторий вектора Пойнтинга вибратора.

При изучении силовых линий электрического поля ограничимся анализом вне области, непосредственно прилегающей к поверхности антенны, так как представление (2) является корректным для описания полей на расстояниях, больших по сравнению с диаметром вибратора. В этой области уравнение (4) имеет две последовательности особых точек, одна из которых определяется обращением в нуль компоненты электрического поля E_z на оси r (условие (7)), а вторая - обращением в нуль компоненты электрического поля E_z на оси z (условие (8))

$$z=0, \omega t = \arctg \frac{r \sin(k\sqrt{r^2 + L^2}) - \sqrt{r^2 + L^2} \cos(kL) \sin(kr)}{r \cos(k\sqrt{r^2 + L^2}) - \sqrt{r^2 + L^2} \cos(kL) \cos(kr)} - \phi + n\pi, \quad (7)$$

$$r=0, \omega t = kz - \arctg \left(\frac{z}{L} \operatorname{tg}(kL) \right) - \phi + n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Особые точки (7) лежат на оси r ЦСК, особые точки (8) - на оси z ЦСК. В пределе $L \rightarrow 0$ (7),(8) переходят в выражения для траекторий особых точек силовых линий диполя [1,2] .

Результаты расчетов траекторий ОТ на осях r и z приведены на рис. 1 (линейные размеры на рис.1. умножены на волновое число свободного пространства).

Качественный анализ типа особых точек ОДУ проводится стандартным образом согласно А.Пуанкаре и А.А.Андронову. В случае антенн, излучающих в однородной среде без потерь, ОДУ силовых линий соответствуют консервативным системам и простые ОТ силовых линий могут быть только седлами и центрами. Тип ОТ определяется локальным качественным анализом подобно тому, как были изучены ОТ диполя [1].

Траектории ОТ с физической точки зрения соответствуют движению фазового фронта $E_z=0$ – вдоль оси r (рис.1а) и движению фазового фронта $E_r=0$ – вдоль оси z (рис.1б). Величина касательной в текущей точке траектории определяет локальную (мгновенную) скорость движения фронта в данном направлении. Это фазовая скорость фронта волны, связанной с данной компонентой электрического поля. Вследствие периодичности процесса достаточно рассмотреть эволюцию полей в пределах одного периода, ограниченного прямыми $kr = \omega t$, $kr = \omega t - 2\pi$ (прямые 1 на рис.1).

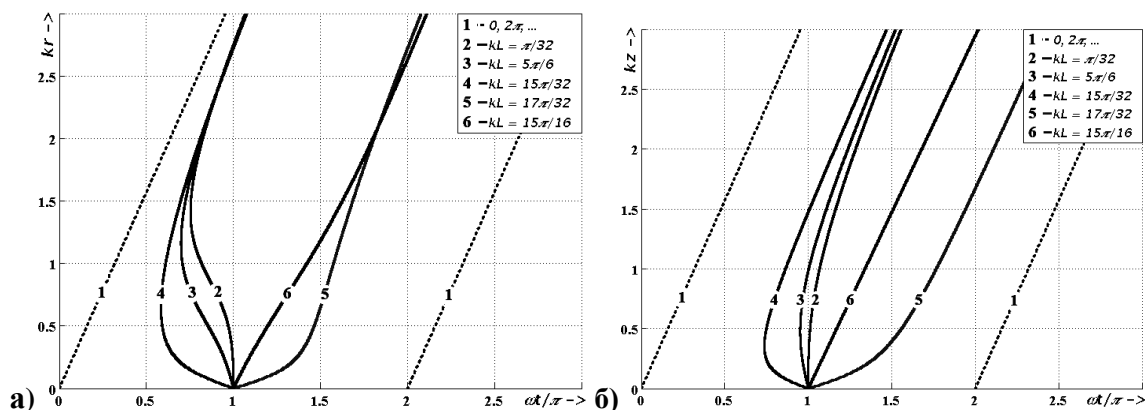


Рис.1. Траектории особых точек электрического поля, движущихся по оси r (а- слева) и по оси z (б- справа)

Рассмотрим особые точки на оси r . Из рис. 1а следует, что на оси r ОТ траекторий 2,3,4 при длине плеча $L < \lambda/4$ возникают в сечении, в котором фазовая скорость фронта волны бесконечна (касательная к траектории параллельна оси r). Это точка бифуркации. При бо'льших временах точка бифуркации распадается на две простые особые точки, одна из которых (ОТ типа центра на верхней ветви траектории) движется с положительной скоростью на бесконечность, вторая (ОТ типа седла на нижней ветви траектории) – с отрицательной скоростью к началу координат. Точка бифуркации – это слияние центра с седлом. Типы ОТ и локальные структуры силовых линий для вибратора с длиной плеча $L < \lambda/4$ (вне вибратора) на оси r аналогичны диполю [1]. На оси z качественное отличие ОТ вибратора от диполя возникает и при $L < \lambda/4$: имеет место точка бифуркации (слияние ОТ типа седла), не наблюдающаяся у диполя.

Новые качественные отличия силовых линий вибратора от диполя возникают при длине плеча вибратора свыше $\lambda/4$. При этом возможно возникновение ОТ вне осей $r=0$ и $z=0$. Детальный анализ формирования ОТ и силовых линий электрического поля был проведен для вибратора с длиной плеча $\lambda/2 < L = 7\lambda/12 < 3\lambda/4$. Для интегрирования ОДУ (4) использовался метод Рунге – Кутта. Было выяснено, что реализуются два качественно различных варианта формирования ОТ вне осей r, z . Первый вариант: в зоне индукции вибратора в определенный момент времени вблизи оси вибратора формируется ОТ типа центра, далее она движется к оси r , попадает на эту ось и движется вдоль нее на бесконечность (рис 2а). Второй вариант (рис.2б) имеет место на достаточно больших расстояниях от осей вибратора (порядка 2λ), где возникает точка бифуркации, которая далее расщепляется на две ОТ типа центра и седла, убегающие на бесконечность вне осей $r=0$ и $z=0$. В пределе траектории ОТ типа центра проецируются на максимумы средней за период диаграммы направленности, а ОТ типа седла - на нули диаграммы направленности.

Динамика силовых линий электрического поля, нулей компонент полей и структуры вектора Пойнтинга в зоне индукции показана для 6 моментов времени на рис. 3.

Без каких – либо принципиальных трудностей аналогичным образом можно рассмотреть эволюцию электромагнитных полей, возбуждаемых периодическими модулированными во времени токами, если распределение тока на вибраторе задать аналитическим выражением.

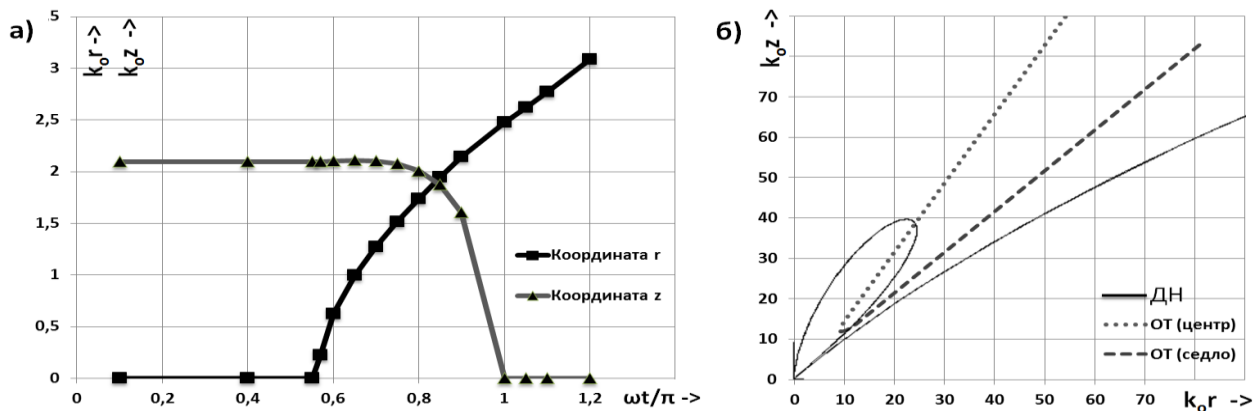


Рис.2. а) Движение ОТ типа центр в зоне индукции вибратора с длиной плеча $7\lambda/12$, б) Рождение и движение на бесконечность ОТ типа центра и седла. Сплошной линией показан фрагмент средней за период диаграммы направленности вибратора.

Более сложным является случай возбуждения вибратора короткими импульсами (длиной порядка и менее длины вибратора). Аналитические методы расчета полей, развитые в [7,8] и в принципе пригодные для качественного анализа, вызывают критические замечания [9] и требуют дальнейшего развития.

Перспективным представляется объединение качественных и численных методов. В этой связи укажем, что использованное нами аналитическое выражение для тока (1), как известно, непригодно на поверхности вибратора и в его малой окрестности [6]. Поэтому для численного решения внутренней задачи теории антенн целесообразно использовать корректные методы решения, удовлетворяющие граничным условиям для полей на поверхности вибратора, развитые в работах Неганова В.А с соавторами [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00735а).

Литература

1. Пермяков В.А., Сороковик Д.В. /Нелинейный мир, 2007, т.5, №12, с. 757-764.
2. Пермяков В.А., Сороковик Д.В. /Нелинейный мир, 2008, т.6, №4, с.288-295.
3. Корюкин А.Н., Пермяков В.А. /Нелинейный мир, 2008, т.6, №4, с. 296-299.
4. Пермяков В.А., Сороковик Д.В., Степанкова С.В. /5 Всероссийская научно-техническая конференция «Радиолокация и радиосвязь», Москва, 21-25 ноября 2011г. –М.: ИРЭ РАН, 2011, с. 314-319.
5. Стреттон Дж. Б. Теория электромагнетизма, -М-Л. Гостехиздат, 1948.
6. Марков Г.Т. Антенны, -М.: Энергия, 1960
7. Smith G.S./ Am.J. Phys. V.69, No.3, March 2001, pp. 288-300.
8. Ковалев И.П., Пономарев Д.М. Анализ процессов излучения и приема импульсных сигналов во временной области. -М.: Рикел. Радио и связь. 1996. 109 с.
9. Пермяков В.А., Онучин В.В. /Сверхширокополосные сигналы в радиолокации, связи и акустике. Сборник докладов Всероссийской научной конференции. Муром, 1-3 июля 2003 г., -Муром: Изд.-полиграфический центр МиВлГУ, 2003 г. с. 39-42.
10. Неганов В.А., Ключев Д.С., Табаков В.А. Устройства СВЧ и антенны, Ч.2. Теория и техника антенн. –М.: УРСС, 2014.

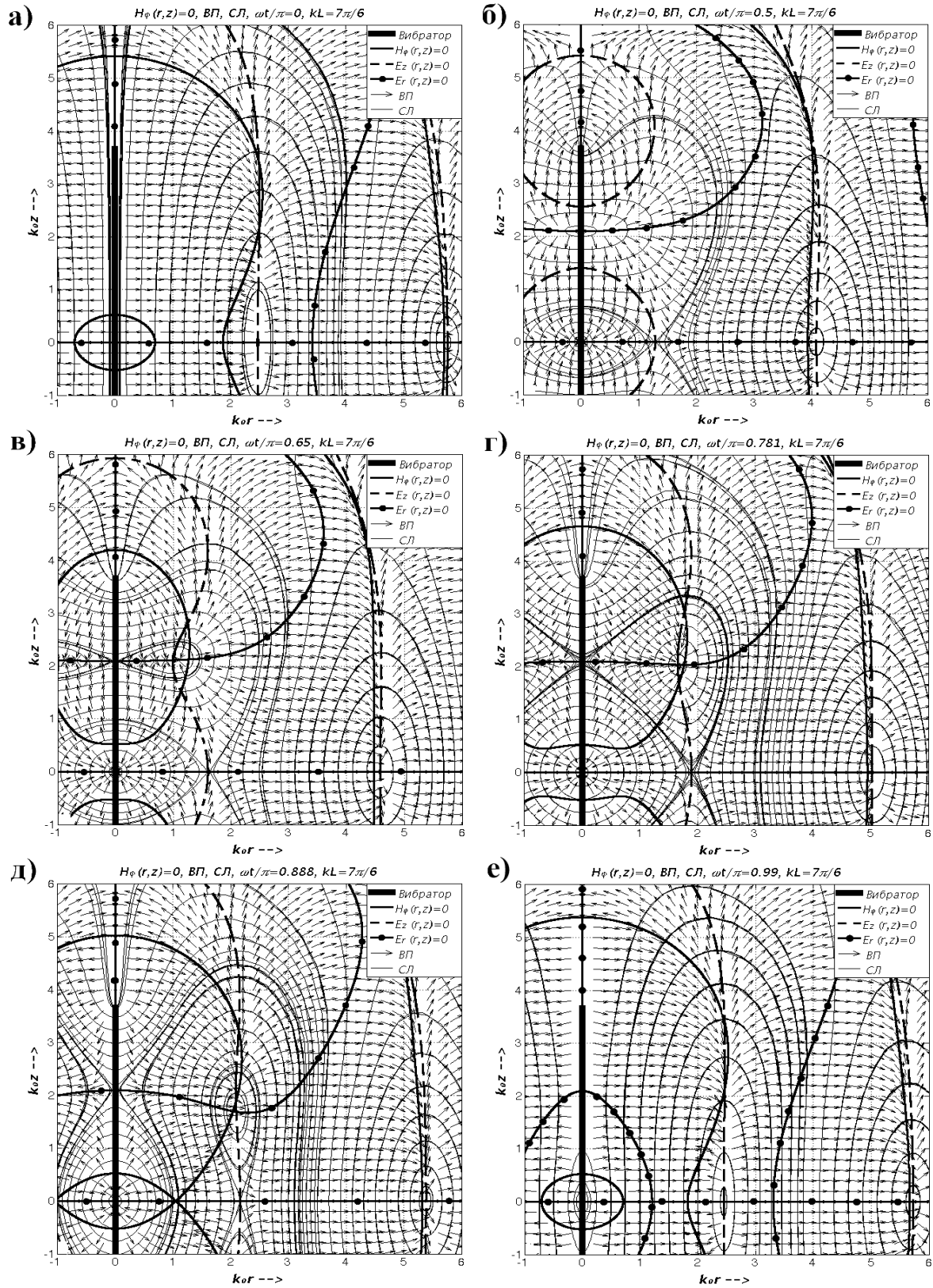


Рис. 3. Силовые линии поля E , нули компонент полей и структура вектора Пойнтинга в зоне индукции вибратора с длиной плеча $7\lambda/12$