

## Флуктуации амплитуды волны при распространении в параболическом ионосферном слое

А.Г. Вологдин, Л.И. Приходько, И.А. Широков

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, [vologdin@phys.msu.ru](mailto:vologdin@phys.msu.ru),  
[l.prikhodko@mail.ru](mailto:l.prikhodko@mail.ru), [ishirokov@cs.msu.su](mailto:ishirokov@cs.msu.su)

*Рассмотрены флуктуации уровня амплитуды волны распространяющейся в случайно-неоднородной среде с регулярной рефракцией. Для параболической модели регулярного ионосферного слоя получены аналитические выражения для дисперсий и функций корреляции амплитуды в самом слое и на выходе из него. Особое внимание уделено исследованию области отражения, где нарушаются условия применимости метода геометрической оптики. Результаты численно проанализированы для различных условий ионосферного зондирования.*

*The fluctuations of the level of the amplitude of wave propagation in random-inhomogeneous medium with regular refraction are considered. Analytical expressions for the dispersions and correlation functions of the amplitude are obtained for parabolic models of the ionosphere layers. Special attention is paid to the study area reflect that violated the conditions of applicability of the method of geometrical optics. The results are analyzed numerically for various conditions probing.*

Исследование распространения волн различной физической природы в случайно-неоднородных средах остается актуальной задачей. При этом особый интерес представляют волновые процессы, общая теория которых описывается условиями приближения геометрической оптики. В этом приближении имеют место два основных соотношения: уравнение эйконала и уравнение переноса, и при использовании этого метода можно перейти от волновой к лучевой трактовке. Большое практическое значение имеет лучевая трактовка при распространении и отражении радиоволн от неоднородных ионосферных слоев, при этом понятие о луче связано с импульсными сигналами или волновыми пучками, ограниченными во времени или (и) в пространстве. Кроме того, если найдена траектория луча в неоднородной среде, то уравнения эйконала и переноса могут быть проинтегрированы вдоль этих траекторий. В работе авторов [1] рассмотрены корреляционные свойства амплитуды волны, отраженной от ионосферного слоя с линейным профилем диэлектрической проницаемости, применимым при зондировании на частотах вдали от максимально применимой частоты. В данной работе исследуем статистические свойства флуктуаций амплитуды волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде с регулярной рефракцией, и используем модель параболического ионосферного слоя, общепринятую при описании зондирования на частотах, близких к максимально применимой частоте.

Как известно [2], в методе геометрической оптики предполагается, что комплексная амплитуда поля в каждой точке приближенно имеет структуру плоской волны, амплитуда которой описывается уравнением переноса, которое для скалярного поля имеет вид

$$2\nabla A \nabla \varphi + A \Delta \varphi = 0$$

здесь  $A$  – амплитуда волны,  $\varphi$  – эйконал, который представляет собой фазовый путь волны. Как принято в методе геометрической оптики, вместо амплитуды  $A$  введем уровень амплитуды  $\chi = \ln A/A_0$ , здесь  $A_0$  – амплитуда “невозмущенной” волны, то есть амплитуда волны при отсутствии флуктуаций в среде. Из уравнения переноса следует, что уровень  $\chi$  подчиняется уравнению

$$2\nabla\varphi\nabla\chi + \Delta\varphi = 0.$$

Пусть диэлектрическая проницаемость неоднородного плоскостростого слоя имеет вид  $\varepsilon(\vec{r}) = \bar{\varepsilon}(z) + \varepsilon_1(\vec{r})$ , где  $\bar{\varepsilon}(z)$  и  $\varepsilon_1(\vec{r})$  – регулярная и случайная составляющие, причем случайная составляющая мала по сравнению с регулярной, то есть для стандарта флуктуаций диэлектрической проницаемости  $\sigma_\varepsilon$  выполняется соотношение  $\sigma_\varepsilon \ll \bar{\varepsilon}$ . Представим  $\varphi, \chi$  в виде рядов по малому параметру  $\varepsilon_1$  и ограничимся первым приближением теории возмущений

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \chi = \chi_0 + \chi_1,$$

где  $\varphi_0, \chi_0$  – невозмущенные значения эйконала и уровня. Тогда для флуктуационной компоненты уровня  $\chi_1$  можно получить уравнение [2]

$$2\nabla\varphi_0\nabla\chi_1 + 2\nabla\chi_0\nabla\varphi_1 + \Delta\varphi_1 = 0. \quad (1)$$

При этом в (1) учтено, что невозмущенное значение уровня есть решение уравнения

$$2\nabla\varphi_0\nabla\chi_0 + \Delta\varphi_0 = 0.$$

Используя соотношение

$$2\nabla\varphi_0\nabla\chi_1 = 2\sqrt{\bar{\varepsilon}}\bar{S}_0\nabla\chi_1 = 2\sqrt{\bar{\varepsilon}}\frac{d\chi_1}{d\sigma},$$

где  $\bar{S}_0 = d\vec{r}_0/d\sigma$  – единичный вектор, касательный к невозмущенному лучу, решение (1) можно представить в виде

$$\chi_1 = -1/2 \int_{\Sigma} (2\nabla\chi_0\nabla\varphi_1 + \Delta\varphi_1) \bar{\varepsilon}^{-1/2} d\sigma. \quad (2)$$

Интегрирование здесь ведется вдоль невозмущенной траектории луча  $\Sigma$  ( $d\sigma$  – элемент длины луча). Таким образом, если известна траектория невозмущенного луча, то уравнение переноса может быть проинтегрировано вдоль нее.

Для параболической модели регулярного плоскостростого ионосферного слоя зависимость  $\bar{\varepsilon}$  от высоты  $z$  имеет вид

$$\bar{\varepsilon}(z) = 1 - \frac{2}{p_0^2} \frac{z}{z_m} + \frac{1}{p_0^2} \left( \frac{z}{z_m} \right)^2, \quad 0 \leq z \leq 2z_m,$$

где  $z_m$  – высота максимума электронной концентрации  $N_m$  (полутолщина слоя),  $p_0 = f/f_{кр}$ ,  $f_{\text{эд}}$  – критическая частота. Если плоскость распространения луча ( $xOz$ ), а угол падения  $\theta_0$ , то после введения переменной  $t = \mp \sqrt{\bar{\varepsilon}(z) - \sin^2 \theta_0} / \cos \theta_0$ ,  $t \in [-1; +1]$  (по аналогии с моделью линейного слоя [1]) для уравнения траектории луча в параметрической форме можно найти

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\text{вх}} + z_m t g \theta_0 p \ln \left( \sqrt{1 - p^2(1 - t^2)} - pt / 1 - p \right) \\ z(t) &= z_m \left( 1 - \sqrt{1 - p^2(1 - t^2)} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

здесь  $x_{\text{вх}}$  – точка входа луча в среду при  $z = 0$  ( $t = -1$ ),

$$p = p_0 \cos \theta_0 = f / f_{\text{мнч}},$$

$f_{\text{и\ddot{v}}}$  – максимально применимая частота.

Далее запишем выражение  $\bar{\varepsilon}(z)$  в параметрической форме и учтем

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{z_m p^2}{\cos \vartheta_0 \sqrt{1-p^2(1-t^2)}} dt.$$

Тогда для флуктуаций уровня амплитуды в параболическом слое вместо (2) получим

$$\chi_1 = -\frac{z_m p^2}{2 \cos \vartheta_0} \int_{-1}^{-t_T} \frac{2 \nabla \chi_0 \nabla \varphi_1 + \Delta \varphi_1}{\sqrt{1-p^2(1-t^2)}} dt, \quad (4)$$

для восходящей траектории луча, здесь  $t_T$  - текущее значение параметра  $t$  (высоты  $z$ ).

Используем далее решение уравнения для  $\chi_0$  в приближении геометрической оптики и решение уравнения для флуктуаций эйконала  $\varphi_1$  в первом порядке теории возмущений. Тогда с помощью интегрирования по частям получим аналитические выражения для флуктуаций уровня амплитуды волны в параболическом ионосферном слое на уровне  $t = -t_T$

$$\begin{aligned} \chi_1 = & \frac{z_m p^2}{4 \cos^2 \vartheta_0} \int_{-1}^{-t_T} \left( \frac{1}{t_T} - \frac{1}{t_1} \right) \frac{\partial \varepsilon_1 [x(t_1), y, z(t_1)]}{\partial z} \frac{dt_1}{\sqrt{1-p^2(1-t_1^2)}} - \frac{z_m^2 p^3}{2 \cos \vartheta_0} \int_{-1}^{-t_T} \ln \frac{\sqrt{1-p^2(1-t_T^2)} + pt_T}{\sqrt{1-p^2(1-t_1^2)} + pt_1} \times \\ & \times \Delta \varepsilon_1 [x(t_1), y, z(t_1)] \frac{dt_1}{\sqrt{1-p^2(1-t_1^2)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогичное соотношение можно получить для нисходящей ветви траектории луча.

Из полученных выражений видно, что флуктуации уровня амплитуды возрастают при стремлении  $t_T \rightarrow 0$ , то есть при приближении  $z$  к точке поворота луча (к области отражения). Таким образом, применимость этих соотношений вблизи точки поворота луча требует более тщательного анализа, который в дальнейшем проведем численно.

Исходя из соотношения (5), найдем функцию автокорреляции  $\chi_1$  на уровне  $z$ , представив ее в виде трех членов:

$$B_z(x_1, x_2, y_1, y_2, z) = B_{11} + B_{12} + B_{22}$$

Выпишем эти выражения для восходящей траектории, предполагая пространственную статистическую однородность случайного поля диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_1$ .

$$\begin{aligned} B_{11} = & \frac{z_m^2 p^4 \sigma_\varepsilon^2}{16 \cos^2 \vartheta_0} \int_{-1}^{-t_T} \left( \frac{t_T - t_1}{t_1} \right) \frac{dt_1}{\sqrt{1-p^2(1-t_1^2)}} \int_{-1}^{-t_T} \left( \frac{t_T - t_2}{t_2} \right) \frac{\partial^2 R_\varepsilon [x(t_2) - x(t_1); y_2 - y_1; z(t_2) - z(t_1)]}{\partial z_1 \partial z_2} \times \\ & \times \frac{dt_2}{\sqrt{1-p^2(1-t_2^2)}}; \quad B_{22} = \left( \frac{z_m p^2}{2 \cos^2 \vartheta_0} \right)^4 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{p^2} \int_{-1}^{-t_T} \ln \frac{pt_T + \sqrt{1-p^2(1-t_T^2)}}{pt_1 + \sqrt{1-p^2(1-t_1^2)}} \frac{dt_1}{\sqrt{1-p^2(1-t_1^2)}} \times \\ & \times \int_{-1}^{-t_T} \ln \frac{pt_T + \sqrt{1-p^2(1-t_T^2)}}{pt_2 + \sqrt{1-p^2(1-t_2^2)}} \Delta_1 \Delta_2 R_\varepsilon [x(t_2) - x(t_1); y_2 - y_1; z(t_2) - z(t_1)] \frac{dt_2}{\sqrt{1-p^2(1-t_2^2)}}, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь  $\sigma_\varepsilon^2$  и  $R_\varepsilon$  - дисперсия и коэффициент автокорреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости,  $\Delta$  - оператор Лапласа по переменным  $x, y, z$ . В (6) учтено, что дисперсия диэлектрической проницаемости постоянна по высоте.

Выражение для перекрестного члена  $B_{12}$  выписывать не будем ввиду его малости по сравнению с двумя другими.

Предположим далее, что функция автокорреляции случайного поля диэлектрической проницаемости имеет вид гауссоиды с характерным масштабом  $a$ , а неоднородности изотропны. Тогда, опуская громоздкие выкладки, связанные с вычислением дифференциальных операторов под знаком интегралов и необходимыми преобразованиями, для функции автокорреляции уровня амплитуды плоской волны в параболическом слое на высоте  $z$  от начала слоя можно получить

$$\begin{aligned}
B_{\chi}(\rho, \eta, z) = & \frac{1}{8} M t_T^{-2} (z_m/a)^{-2} \int_{-1}^{-t_T} \frac{t_T - t_1}{t_1} \times \frac{dt_1}{\sqrt{1-p^2(1-t_1^2)}} \int_{-1}^{-t_T} \frac{t_T - t_2}{t_2} \times \left[ 1 - 2 \left( \frac{z_m}{a} \right)^2 f_2^2 \right] \times \\
& \times \frac{\exp\left(-r^2/a^2\right) dt_2}{\sqrt{1-p^2(1-t_2^2)}} + \frac{1}{4} p^4 M \int_{-1}^{-t_T} \ln \frac{pt_T + \sqrt{1-p^2(1-t_T^2)}}{pt_1 + \sqrt{1-p^2(1-t_1^2)}} \times \frac{dt_1}{\sqrt{1-p^2(1-t_1^2)}} \times \\
& \times \int_{-1}^{-t_T} \ln \frac{pt_T + \sqrt{1-p^2(1-t_T^2)}}{pt_2 + \sqrt{1-p^2(1-t_2^2)}} \left[ 15 - 20 \frac{r^2}{a^2} + 4 \left( \frac{r^2}{a^2} \right)^2 \right] \times \frac{\exp\left(-r^2/a^2\right) dt_2}{\sqrt{1-p^2(1-t_2^2)}}, \quad (7)
\end{aligned}$$

здесь  $r^2/a^2 = (\rho/a + z_m/a f_1)^2 + \eta^2/a^2 + (z_m/a f_2)^2$ ;  $M = (z_m/a)^4 \times \langle N_1^2 \rangle / N_m^2$ ,

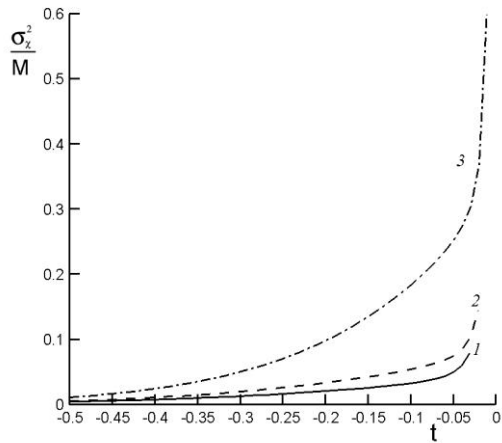
$$f_1 = ptg\theta_0 \ln \left[ \left( \sqrt{1-p^2(1-t_2^2)} \right) \left( \sqrt{1-p^2(1-t_1^2)} \right)^{-1} \right], \quad f_2 = \sqrt{1-p^2(1-t_1^2)} - \sqrt{1-p^2(1-t_2^2)},$$

где  $\rho, \eta$  - расстояние между точками наблюдения по осям  $x, y$ , соответственно,

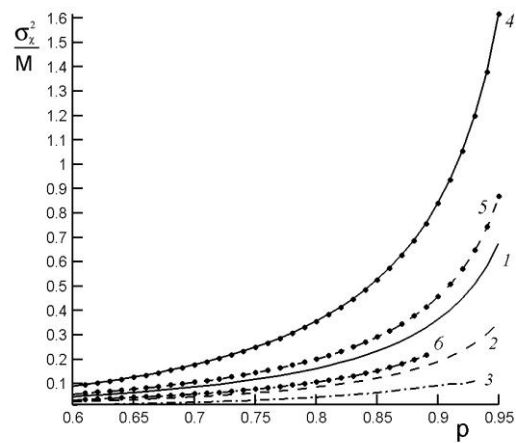
$r$  - расстояние между двумя точками двух траекторий, описываемых (3), а также использовано соотношение  $\sigma_{\varepsilon}^2 = \langle \varepsilon_1^2 \rangle = \cos^2 \theta_0 / p^4 \left( \langle N_1^2 \rangle / N_m^2 \right)$ .

Дальнейший анализ полученных аналитических решений для автокорреляционной функции (7) и дисперсии уровня амплитуды волны  $\sigma_{\chi}^2$  проведем численно для разных высот  $z$ , определяемых переменной  $t \equiv t_T$  как внутри слоя, так и на выходе из него ( $t = 1$ ) для различных условий ионосферного зондирования.

На рисунке (1) представлены зависимости дисперсий уровня, нормированных на величину  $M = (z_m/a)^4 \times \langle N_1^2 \rangle / N_m^2$ , для разных частот зондирования (параметра  $p$ ) от высоты  $z$  (параметра  $t$ ) для восходящей ветви траектории луча в параболическом слое ионосферы,  $z_m = 100$  км,  $a = 5$  км; угол падения  $\theta_0 = 45^\circ$ .



**Рис. 1.** Зависимость относительных дисперсий уровня амплитуды от высоты в слое:  $z_0 = 100$  км;  $a = 5$  км;  $\vartheta_0 = 45^\circ$ . Для кривых 1–3  $p = 0.7$ ;  $0.8$ ;  $0.95$



**Рис.2.** Зависимость относительных дисперсий уровня амплитуды от частоты на выходе из слоя. Для кривых 1–3  $\vartheta_0 = 45^\circ$ ;  $a = 10; 5; 2,5$  км. Для кривых 4–6  $\vartheta_0 = 20^\circ$

С увеличением высоты  $z$  относительная дисперсия уровня возрастает, причем это возрастание усиливается вблизи области отражения  $t \rightarrow 0$ . При этом интенсивность флуктуаций уровня на всех высотах возрастает с увеличением частоты зондирования.

Поведение флуктуаций уровня амплитуды вблизи области отражения представляет большой практический интерес. Для определения влияния этой области на интенсивность флуктуаций уровня численно оценивался вклад отдельных членов, входящих в (7), в суммарную относительную дисперсию  $\sigma_x^2 / M$ , на разных высотах. Анализ показал, что влияние члена  $B_{11}$  на величину суммарной дисперсии уровня становится существенным лишь вблизи узкой области  $t \approx t_{\min}$  (соответствующая высота

$z_{\max} = z_m \left( 1 - \sqrt{1 - p^2 (1 - t_{\min}^2)} \right)$ ), когда этот член неограниченно возрастает, а приближение геометрической оптики становится неприменимым. При определении высоты  $z_{\max}$ , до которой справедливы полученные решения, нами использовался критерий, который соответствует равенству членов  $B_{11}(0, 0, z_{\max})$  и  $B_{22}(0, 0, z_{\max})$  на этой высоте. Заметим, что первый из указанных членов имеет в нуле (при  $t = 0$ ) логарифмическую расходимость. Исключив из рассмотрения эту узкую область вблизи области отражения можно найти автокорреляционную функцию и дисперсию уровня амплитуды плоской волны на выходе из ионосферного слоя ( $t = 1$ ). С учетом сказанного, это выражение можно представить в следующем виде

$$B(\rho, \eta, z = 0) = B(\rho, \eta, z = z_{\max}) + \frac{1}{8} M t_T^{-2} (z_m/a)^{-2} \int_{t_{\min}}^1 \frac{1-t_1}{t_1} \times \frac{dt_1}{\sqrt{1-p^2(1-t_1^2)}} \int_{t_{\min}}^1 \frac{1-t_2}{t_2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ 1 - 2 \left( \frac{z_m}{a} \right)^2 f_2^2 \right] \times \frac{\exp(-r^2/a^2) dt_2}{\sqrt{1-p^2(1-t_2^2)}} + \\
& + \frac{1}{4} p^4 M \int_{t_{\min}}^1 \ln \frac{p+1}{pt_1 + \sqrt{1-p^2(1-t_1^2)}} \times \frac{dt_1}{\sqrt{1-p^2(1-t_1^2)}} \times \\
& \times \int_{t_{\min}}^1 \ln \frac{p+1}{pt_2 + \sqrt{1-p^2(1-t_2^2)}} \left[ 15 - 20 \frac{r^2}{a^2} + 4 \left( \frac{r^2}{a^2} \right)^2 \right] \times \frac{\exp(-r^2/a^2) dt_2}{\sqrt{1-p^2(1-t_2^2)}}. \quad (8)
\end{aligned}$$

С использованием полученных выражений были вычислены дисперсии уровня амплитуды на выходе из ионосферного слоя, нормированные на величину  $M$ . Результаты численного расчета представлены на рис. 2, где изображены зависимости  $\sigma_z^2/M$  от параметра  $p$  при разных углах падения волны на слой и масштабах случайных неоднородностей. Кривые (1-3) соответствуют углу падения  $\vartheta_0 = 45^\circ$  и масштабам  $a = 10; 5; 2,5$  км, соответственно, кривые (4-6) – углу  $\vartheta_0 = 20^\circ$  и тем же масштабам  $a$ . Как видно из рисунка, при увеличении частоты зондирования дисперсия уровня монотонно возрастает при всех приведенных углах  $\vartheta_0$  и масштабах  $a$ . В то же время при фиксированных значениях частоты зондирования и угла падения интенсивность флуктуаций уровня амплитуды возрастает при уменьшении размера неоднородностей. Это означает, что амплитудные флуктуации обусловлены в основном мелкомасштабной частью спектра диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_1$ , как отмечалось в [2] при рассмотрении рассеяния в однородной среде.

Как уже было отмечено при определении высоты  $z_{\max}$ , критерий, использованный при ее нахождении, позволяет определить влияние параметров слоя на величину  $t_{\min}$ . На рис. 3. изображены зависимости  $t_{\min}$  от частоты зондирования для кривых рисунка 2.

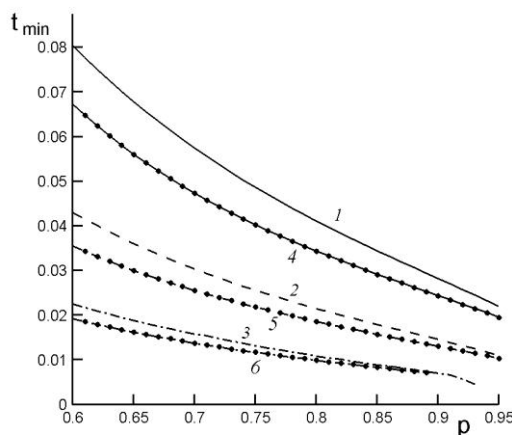
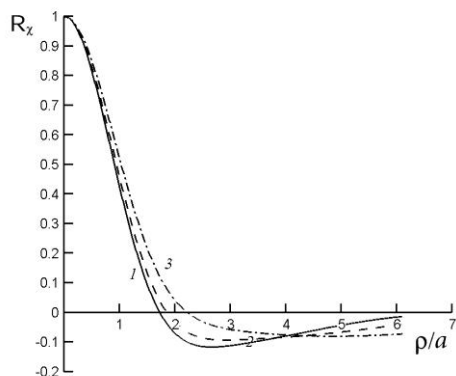


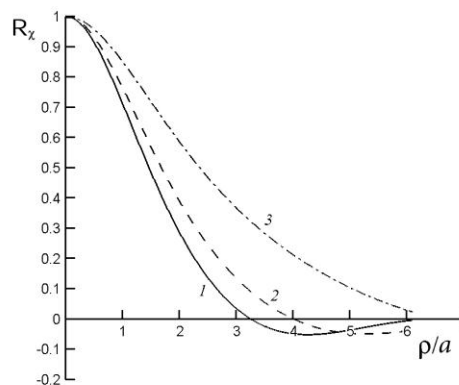
Рис. 3. Зависимости параметра  $t_{\min}$  от частоты зондирования для кривых рисунка 2.

На рис. 4, 5 представлена структура коэффициентов автокорреляции флуктуаций уровня амплитуды плоской волны внутри слоя на уровне  $t = t_{\min}$  и на выходе из

параболического слоя  $t=1$ , когда точки наблюдения разнесены по оси  $x$  в плоскости падения. Кривые построены для углов падения  $\vartheta_0 = 45^\circ$ ; полутолщина  $z_m = 100$  км, масштаб неоднородностей  $a = 5$  км и разным частотам зондирования: кривым 1-3 соответствуют параметры  $p = 0,7; 0,8; 0,95$ . Видно, что с увеличением  $p$  все кривые уширяются, а радиус корреляции  $\rho_k/a$ , который можно определить, например, по координате, при которой коэффициент автокорреляции обращается в нуль, увеличивается. При этом увеличение радиуса корреляции для всех кривых на выходе из слоя существенно больше, чем внутри слоя.



**Рис. 4. Коэффициенты автокорреляции уровня амплитуды по оси  $x$  вблизи  $t = -t_{\min}$ . Для кривых 1-3  $p = 0,7; 0,8; 0,95$**



**Рис. 5. Коэффициенты автокорреляции уровня амплитуды по оси  $x$  вблизи  $t = -t_{\min}$ . Для кривых 1-3  $p = 0,7; 0,8; 0,95$**

Если точки наблюдения разнесены по оси  $y$  (перпендикулярно плоскости падения) пространственный коэффициент автокорреляции уровня практически не зависит от параметров траектории луча в слое, а радиус корреляции  $\eta_k \approx a$ .

Таким образом, полученные различия пространственных коэффициентов автокорреляции уровня амплитуды в плоскости падения и перпендикулярно ей свидетельствует о том, что при рассеянии на изотропных неоднородностях диэлектрической проницаемости среды регулярная рефракция приводит к анизотропии флуктуаций амплитуды.

### Литература

1. Вологдин А.Г., Приходько Л.И., Широков И.А. // РЭ. 2010. Т 55. № 8. С. 930-935.
2. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978.