Моделирование случайных чисел с распределением Симпсона

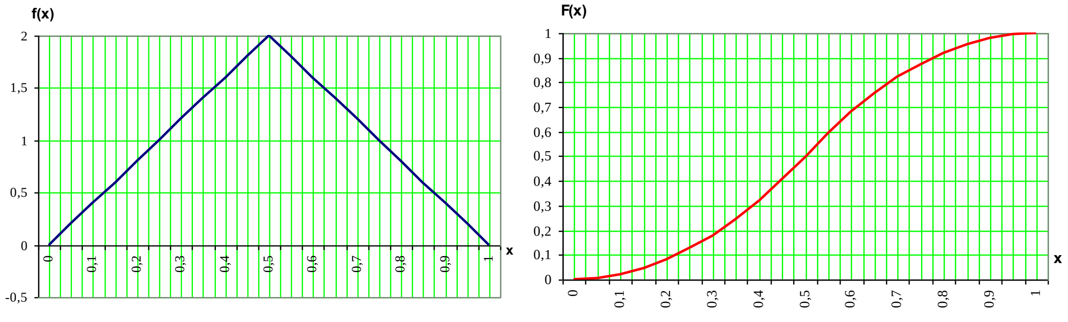
С.Н. Середа

Муромский институт (филиал) Владимирский государственный университет,
г. Муром, Орловская, 23,
e-mail: sns_murom@mail.ru

Во многих областях науки и техники возникает задача моделирования случайных чисел с различными законами распределения для описания реальных процессов, которая решается с помощью функций стандартных генераторов в прикладных пакетах программ и языках программирования [1]. В ряде случаев необходимо построить модель стохастического процесса с произвольно заданным законом распределения. Так, например, при вероятностном описании процессов аварийности и травматизма в человеко-машинных системах оперируют нечеткими величинами с треугольной функцией принадлежности, а также случайные числа с треугольным законом распределения Симпсона (рис.1).

$$f(x)=\begin{cases}0,\, b<x<a\\ \dfrac{2\,(x-a)}{(m-a)},\, x\in[a,m]\\ \dfrac{2(b-x)}{(b-m)},\, x\in[m,b]\end{cases},\qquad F(x)=\begin{cases}0,\, x<a\\ \dfrac{(x-a)^2}{(m-a)},\, x\in[a,m]\\ (b-a)-\dfrac{(b-x)^2}{(b-m)},\, x\in[m,b]\\ 1,\, x>b\end{cases}, \tag{1}$$

где $m=\dfrac{a+b}{2}$



а) б)

Рис.1. Дифференциальная (а) и интегральная (б) функции распределения Симпсона

Распределение Симпсона также применяется при вероятностном моделировании ошибок в линейной модели наблюдений, определении вариационных характеристик при расчете сопротивлений конструкционных материалов, интервальном экспертном прогнозировании, экономической оценки риска и т.д. [2,3,4].

Поскольку в широко распространенных программах математического моделирования MathCad и Matlab отсутствуют стандартные функции генерирования случайных чисел с треугольным законом распределения, на практике применяют различные методы моделирования случайных чисел с произвольным законом распределения, как, например, метод суперпозиций (Михайлова) [1], метод отсеивания Неймана [2], метод обратных функций [5]. Так, в методе обратных функций на первом этапе получают случайное число $r\in[a,b]$ с равномерным законом распределения и средним значением m, а на втором этапе проводят пересчет через обратную функцию $x=F^{-1}(r)$, (2) и получают искомое число x.

$$x=\begin{cases}\sqrt{r(m-a)}+a,\ r\in[a,\ m)\\ b-\sqrt{(b-a-r)(b-m)},\ r\in[m,b]\end{cases} \qquad (2)$$

Рассмотрим предлагаемый автором метод проекций для моделирования треугольно распределенных случайных чисел, основанный на масштабных сдвигах равномерно распределенных случайных чисел по проекциям на диагонали квадратной матрицы порядка N, определяющего точность представления непрерывной случайной величины.

В квадратной матрице порядка n суммарное количество чисел равномерно заполненной матрицы, расположенных на всех диагоналях матрицы, как главных, так и второстепенных, образует треугольное распределение. Каждое число матрицы проецируется на одну из инцидентных ему диагоналей и затем осуществляется числовой сдвиг (рис.2). Соответственно, как и в методе обратных функций, в качестве исходных данных здесь выступает массив равномерно распределенных случайных чисел $r\in[a,b]$, в отношении которых выполняется преобразование по случайно выбираемым проекциям $s\in[0,m]$ на матрице порядка n и формируется массив случайных чисел y_i с распределением Симпсона (3).

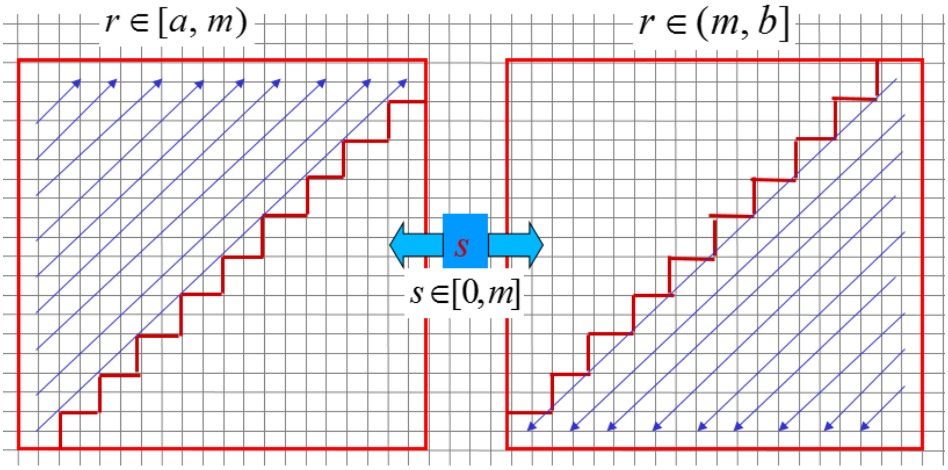


Рис.2.

$$y_i=\begin{cases}r+s,\ r\le(r<m)\wedge(r\le m-s),\ \ r\in[a,m)\\ b-r+s,\ r>(r>m)\wedge(r-m>m-s),\ r\in(m,b]\\ r,\ иначе\end{cases} \qquad (3)$$

Ниже представлены результаты моделирования в программе MathCad:

— исходные числа с равномерным распределением r_i (рис.3) с математическим ожиданием Mx=0.5, дисперсией Dx=0.08 и коэффициентом корреляции между парой чисел Rx=0.012;

— числа с треугольным распределением X_i, найденные по (2) (рис.4) со статистическими параметрами Mx=0.49, Dx=0.043, Rx=0.089;

— числа с треугольным распределением Y_i, найденные по по (3) (рис.5) Mx=0.46, Dx=0.035, Rx=0.029,

а также их гистограммы распределения P_k, интегральная F_j и дифференциальная f_k функции распределения.

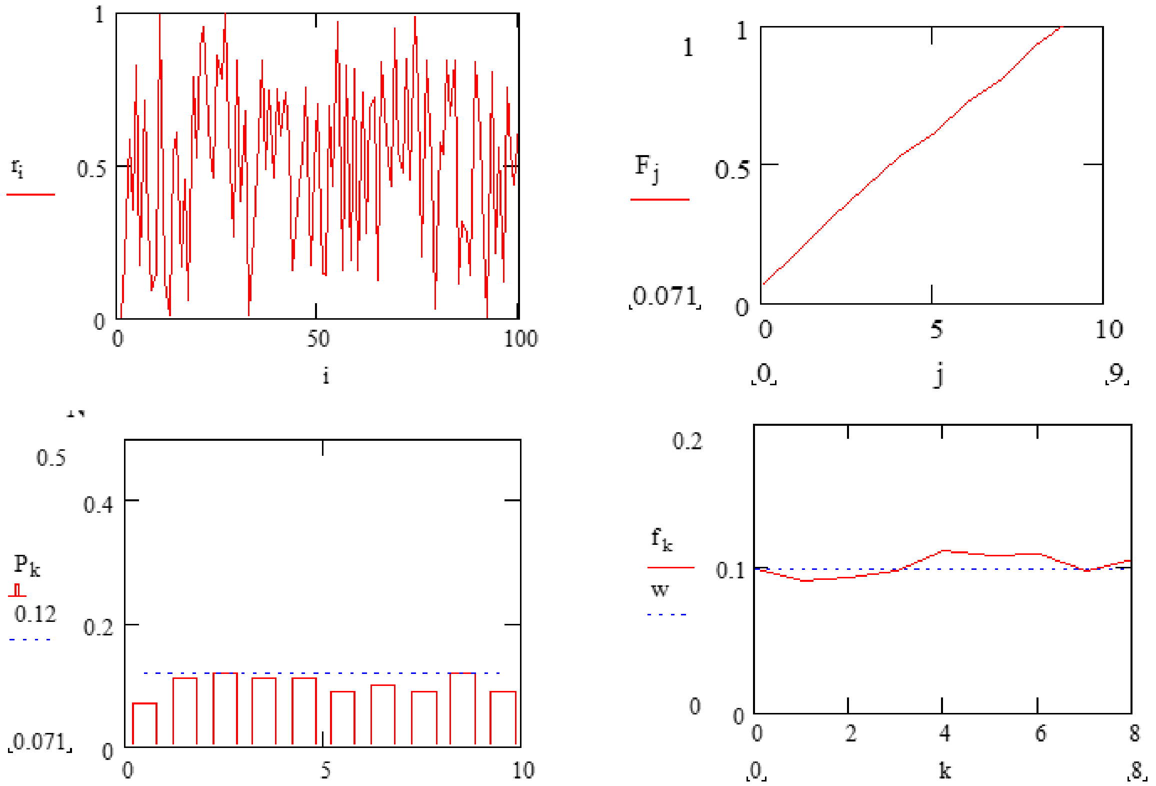


Рис.3. Случайные числа с равномерным законом распределения

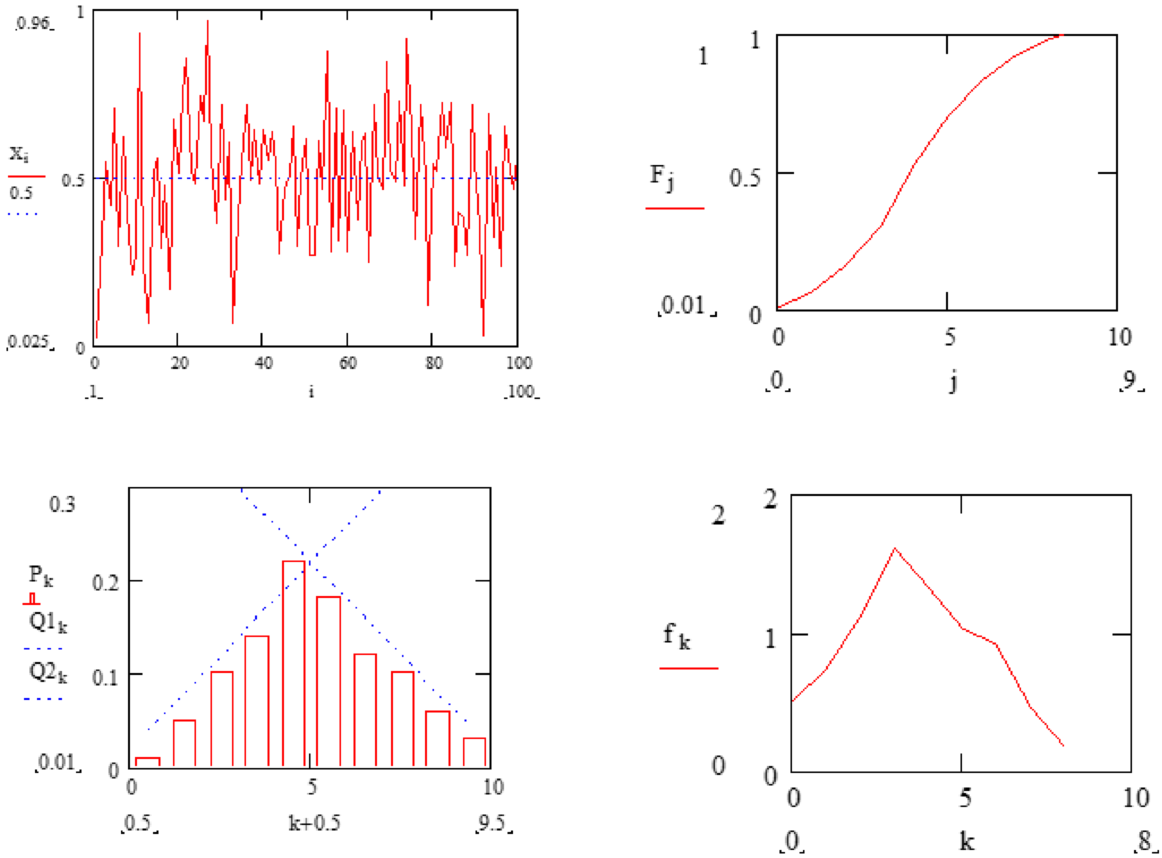


Рис.4. Случайные числа с треугольным законом распределения X_i, по методу обратных функций

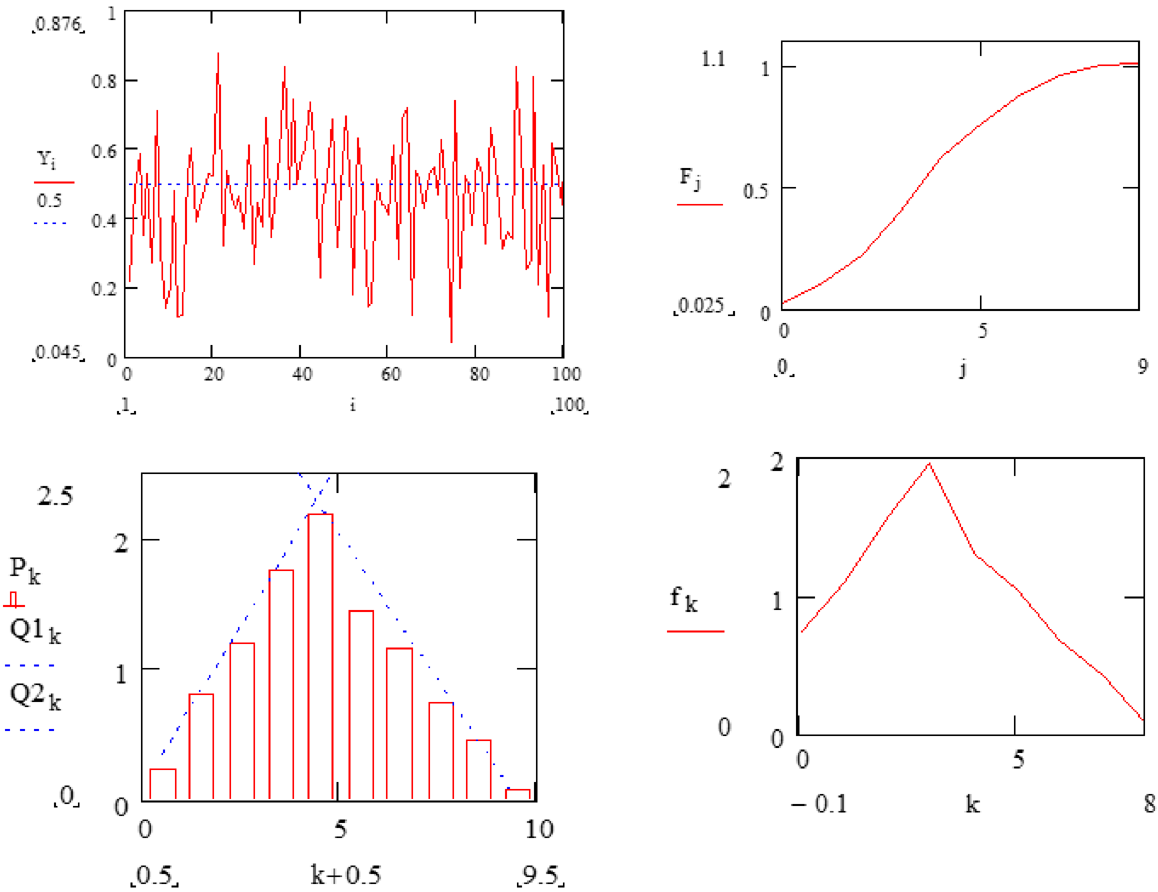


Рис.5. Случайные числа с треугольным законом распределения $У_i$, по методу проекций

Анализ полученных результатов моделирования показывает, что предложенный метод получения случайных чисел с распределением Симпсона обеспечивает приемлемое качество генерируемых чисел, не хуже, чем известный метод обратных функций, при этом требует меньших вычислительных затрат. Во всех случаях гипотеза о законе распределения случайных чисел оказывалась верна на уровне значимости α=0.05 [5].

Литература

1. Михайлов, Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. – М.: Академия, 2006. – 368с.
2. Walker A.J. An efficient method for generating discrete random variables with general distributions// ASM Trans. Math. Software. 1977. №3. – pp.253-256.
3. Rider P.R. «Sampling from a Triangle Distribution». J. Am. Statist. Assoc. 1963 June, 58:302, pp.509-512
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высш.шк., 2007.
5. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М. Высшая школа, 1999. – 479с.