Спектральный анализ в базисах прямоугольных функций

С.Н. Середа

Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета,
г. Муром, ул. Орловская, 23
e-mail: sereda-2010@mail.ru

Ортогональные функции широко используются в задачах ЦОС при спектральном анализе и синтезе сигналов, распознавании образов, проектировании логических схем и систем связи [1]. На практике наряду с Фурье анализом используются функции Уолша – Адамара. Матрица функций Уолша порядка n с упорядочением по Адамару может быть построена рекуррентно [2]

$$H(n)=\begin{bmatrix} H(n-1) & H(n-1) \\ H(n-1) & -H(n-1) \end{bmatrix}, \qquad H(2)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Тогда для порядка n=3 базису функций Уолша – Адамара (рис.1) соответствует матрица H(3). С учетом изоморфизма систем функций Уолша к линейным однородным функциям алгебры логики, как соответствие (1, -1) →(1, 0), функции Уолша можно представить в виде битовых строк и интерпретировать их как двоичную форму представления чисел [3]

$$H(3)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда, например, первые восемь функций Уолша с упорядочением по Пэли [2], образуют числовой вектор

$$H(3)=\begin{bmatrix} 255 & 240 & 204 & 195 & 170 & 165 & 153 & 150 \end{bmatrix}^t \tag{2}$$

Рассмотрим конечное поле N=256=2^m чисел (m=8), упорядоченных в матрице [P], где $p_{ij}=n*i+j$, $n\in[0,M-1]$, $M=\sqrt{N}$. В этом поле существует $C_8^4=70$ чисел (табл. 1), имеющих по 4 единицы в двоичных наборах, где два числа (0 и 255) ортогональны любым другим. Каждое число из выделенной группы ортогонально лишь 36 другим числам этой группы. Из 70-ти чисел 36 имеют по 2 единицы в каждом полубайте, согласно пересечению соответствующих строк и столбцов поля, и образуют четыре группы по 9 чисел. Например, одна из групп содержит числа

$$V = [204, 202, 201, 172, 170, 169, 156, 154, 153]. \tag{3}$$

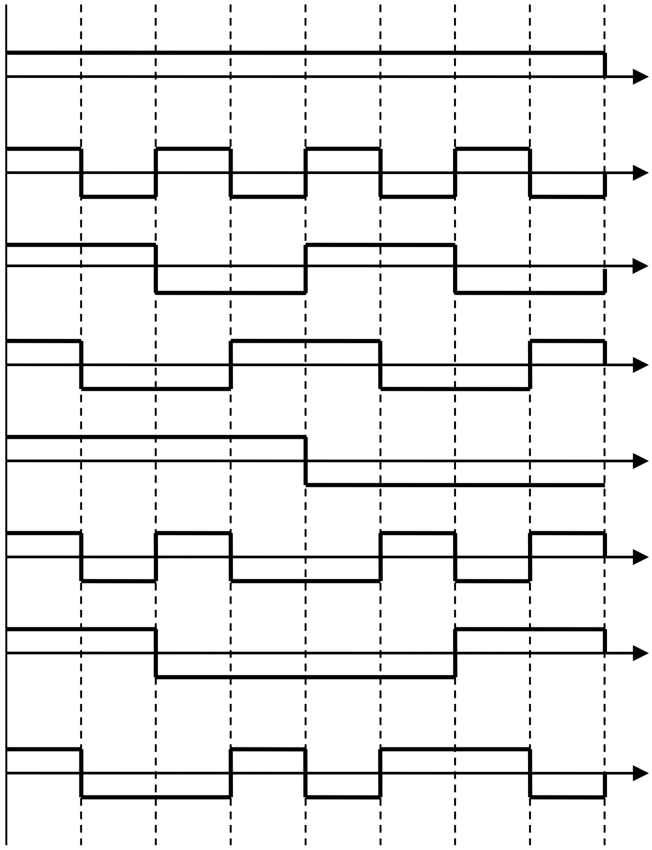

Рис. 1. Базис функций Уолша-Адамара

Схема взаимосвязей этих чисел с учетом ортогональности показана на рис.2.

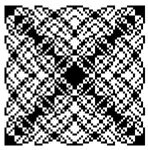

Рис. 2.

Таблица 1. Поле чисел *N*=256

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127
128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143
144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175
176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191
192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207
208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223
224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239
240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255

Если необходимо, чтобы первый столбец и первая строка матрицы базисных функций содержали только единицы, то выбор базисных чисел будет из нижней половины поля. Тогда возможно всего 3!=6 различных полных базисов из 4-х парных функций, представленных деревом (рис.3), в число которых входят функции классического базиса Уолша, заданные числами, размещенными на диагоналях матрицы $[P]$.

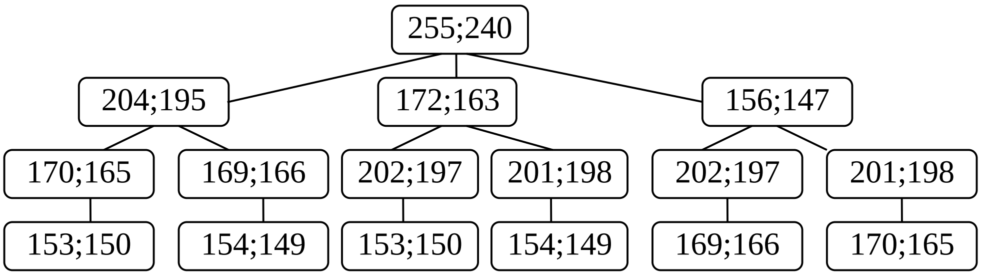

Рис.3. Дерево формирования базисных функций

Каждый базис содержит 4 пары функций, заданных тремя числами V_i вектора (3) с учетом матрицы связей R, числом 255, а также их парами W_i из другой группы, формируемыми по правилу

$$W_i = (V_i \oplus 240) + (15 - (V_i \oplus 15)). \qquad (4)$$

Матрица связей между функциями таких базисов R определяется Кронекеровским произведением инверсных единичных матриц третьего порядка.

$$R = \bar{I}_3 \otimes \bar{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Выбор любого числа при формировании базиса исключает другие альтернативы из того же столбца и той же строки матрицы [P]. Сумма чисел любого вектора базисных функций постоянна.

Дополнительно существует 4!=24 базисов функций, образованных четырьмя числами из второй группы, имеющими нечетное число единиц в полубайтах, дополненных четырьмя числа-ми первой группы с четным числом единиц в полубайтах. Здесь выбор четырех чисел с нечетным числом единиц определяется матрицей связей $R4 = \bar{I}_4 \otimes \bar{I}_4$. Введем базовые матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

для которых также существуют матрицы с инверсией элементов и транспонированные матрицы. Тогда матрица связей между упорядоченными числами первой и второй групп имеет блочную структуру

$$RD = \begin{bmatrix} G & G & H \\ G & H & G \\ H & G & G \\ H & H & H \end{bmatrix}, \text{ где } G = \begin{bmatrix} D & \bar{F} & \bar{C}^t \\ \bar{C} & F & B \end{bmatrix} \quad H = \bar{G} \qquad (7)$$

В общем случае можно построить несимметричный базис прямоугольных ортогональных функций, имеющих в двоичном числовом представлении произвольное число единиц, подобно определенным выше базисам. Например, для классического базиса Уолша – Адамара, несимметричный базис определяется вектором чисел, размещенных на диагоналях матрицы [P]

$$H^*(4) = [238 \quad 225 \quad 221 \quad 210 \quad 187 \quad 180 \quad 136 \quad 135]^t. \qquad (8)$$

Вычисление спектра сигнала в каком-либо базисе производится как матричное произведение

$$Y = W * X \qquad (9)$$

где X – вектор входного сигнала;

Y – спектр сигнала;

W – матрица ортогонального преобразования.

Тогда восстановить сигнал по его спектру можно путем обратного преобразования

$$X = W^{-1} * Y \qquad (10)$$

При этом ортогональная матрица обратного преобразования находится с учетом выполнения равенства

$$W * W^{-1} = I \qquad (11)$$

где I – единичная матрица.

Для классического базиса функций Уолша – Адамара, известно свойство матриц преобразования

$$W = W^{-1} = W^t, \qquad (12)$$

где W^t – транспонированная матрица.

Условие симметричности (12) обеспечивает возможность применения одного и того же алгоритма для прямого и обратного преобразования. Исследования выявленных новых базисов показали, что $W^{-1} = W^t$, то есть обратная матрица легко вычисляется через транспонирование матрицы прямого преобразования, но при этом $W \neq W^t$.

Для новых базисов прямоугольных функций можно построить быстрый алгоритм преобразования, подобный известному алгоритму Кули – Тьюки, с учетом факторизации матриц базисов.

$$W(4) = X \otimes Y \otimes Z\,, \qquad (13)$$

где X, Y, Z – базовые, инвертированные или транспонированные матрицы, заданные по (6) с учетом условия изоморфизма, где значению «0» соответствует инвертирование элементов матрицы.

Результаты модельного эксперимента показали, что преобразование по классическому базису Уолша – Адамара дает наиболее компактный спектр для детерминированных сигналов [5]. Хотя спектры случайных сигналов, вычисленные в различных базисах, практически идентичны, выбор наиболее подходящего базиса с учетом структуры спектра может дать определенный эффект в задачах кодирования, сжатия и выделения информативных признаков сигнала.

Литература

1. Залманзон Л.А. Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 496с.
2. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: Связь, 1980. – 248с.
3. Артемьев М.Ю., Гаев Г.П. и др. Алгоритм формирования симметричных систем функций Уолша. // Радиотехника и электроника. 1978. №7 – С. 1432 – 1439.
4. Голуб Дж., Ван Лоу Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 548с.
5. Середа С.Н., Середа Ю.А. Квазиоптимальная фильтрация изображений в частотной области // Алгоритмы, методы и системы обработки данных. 2001. №6. – С.19-23.