# Обобщенные уравнения Гельмгольца гиротропных волноводов произвольной формы поперечного сечения

Д.Ш. Ширапов, Г.Б. Итигилов

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управлени, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В. E-mail: shir48@mail.ru*

*Получены обобщенные уравнений Гельмгольца для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании. Тестирование этих уравнений произведено по схеме: а) из обобщенных уравнений выведены уравнения Гельмгольца гибридных НЕ и ЕН волн для гиротропного волновода с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при продольном намагничивании; б) из последних уравнений выведены, известные частные уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов прямоугольной и круглой форм поперечного сечения при продольном намагничивании.*

*Obtained generalized Helmholtz equations for gyrotropic waveguides with orthogonal-curvilinear cross-sectional shape with arbitrary magnetization. Testing of these equations produced according to the scheme: a) from the generalized equations derived the Helmholtz equations a hybrid HE and EH waves for gyrotropic waveguide with orthogonal-curvilinear cross-sectional shape when the longitudinal magnetization; b) from the last equations derived the known private the Helmholtz equations for gyrotropic waveguides of rectangular and circular cross-section shapes for the longitudinal magnetization.*

## Обобщенные уравнения

Обобщенные уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогональной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании получены решением системы дифференциальных уравнений Максвелла [1], в предположении устоявшегося во времени процесс без наведенных токов и зарядов

$$\begin{cases} Rot\overline{H} = j\omega\varepsilon\overline{E}; \\ Rot\overline{E} = -j\omega\overline{B}; \\ Div\overline{D} = 0; \\ Div\overline{B} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\overline{H}$ *и* $\overline{E}$ – напряженности магнитного и электрического полей,

$\overline{B} = \tilde{\mu}\overline{H}$ *и* $\overline{D}$ - магнитная и электрическая индукции,

$j$ -мнимая единица;

$\varepsilon$ - абсолютная диэлектрическая проницаемость феррита,

$\omega$ –циклическая частота,

$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & jk & jl \\ -jk & \mu_{22} & jm \\ -jl & -jm & \mu_{33} \end{bmatrix}$ - тензор магнитной проницаемости феррита.

Система (1) решается с использованием тензорного исчисления, позволяющего для гиротропных волноводов с произвольными криволинейными контурами ортогонального поперечного сечения, описывать изменения кривизны локального базиса и магнитную проницаемость феррита с помощью ковариантного дифференцирования и тензором второго порядка.

Предполагается, что электромагнитная волна распространяется вдоль продольной координаты, совпадающей с осью Z декартовой системы координат. Данное обстоятельство и то, что форма поперечного сечения имеет криволинейный вид по обеим координатным осям, означает:

$$h_1 \neq 1; \quad h_2 \neq 1; \quad h_3 = 1,$$

где $h_1, h_2$ - коэффициенты Ламэ поперечных координатных осей и $h_3$ - продольной [2].

Коэффициенты Ламэ связаны с базисными векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ выражением [2]:

$$|e_i| = \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2} \equiv h_i, \qquad (2)$$

где $x, y, z$ - декартовы координаты;

$x_i$ - ортогональные криволинейные координаты ($i$=1, 2, 3).

Поэтому символы Кристоффеля 2-го рода в криволинейных ортогональных системах координат, выраженные через коэффициенты Ламэ будут [3]:

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial(h_i)}{\partial x_i}; \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial(h_i)}{\partial x_j}; \quad \Gamma_{jj}^i = -\frac{h_j}{h_i^2} \cdot \frac{\partial(h_j)}{\partial x_i}; \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i; \quad \Gamma_{jk}^i = 0 \quad (i \neq j \neq k) \qquad (3)$$

Так как волновод является регулярной областью, поэтому выполняется условие

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_1}{\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial z} = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

В общем случае для произвольных ортогональных криволинейных систем координат $Rot$ определяется выражением [4]:

$$\begin{aligned} Rot\bar{F} = {} & \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial x_3}\right]\bar{e}_1 - \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial x_3}\right]\bar{e}_2 + \\ & \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial x_2}\right]\bar{e}_3, \end{aligned} \qquad (5)$$

где $F_1, F_2, F_3$ - проекции вектора $\bar{F}$ на координатные линии $x_1, x_2, x_3$, соответственно.

Для криволинейных ортогональных систем координат с продольно-регулярной осью имеем: $x_3 = z$ - продольно-регулярная ось. Тогда $h_3 = 1, F_3 = F_z = F_\perp e^{-j\gamma z}$ - функция по продольной оси Z ($F_\perp$ - имеет зависимость от $x_1, x_2$), $\gamma$ - постоянная распространения, $F_\perp \neq F_\perp(z)$. В соответствие с последними замечаниями формула (5) примет вид:

$$\begin{aligned} Rot\bar{F} = {} & \frac{1}{h_2}\left[\frac{\partial F_z}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{\partial z}F_2 - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}h_2\right]\bar{e}_1 - \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial F_z}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial z}F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial z}h_1\right]\bar{e}_2 + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2}\left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial x^1}F_2\right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}h_1 + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}F_1\right)\right]\bar{e}_3. \end{aligned} \qquad (6)$$

Так как коэффициенты Ламэ $h_1$ и $h_2$ не являются функцией от продольной координаты $z$, т.е. $h_1 \neq f(z)$, $h_2 \neq f(z)$, то выражение (6) упрощается:

$$Rot\overline{F}=\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial z}h_2\right)\overline{e}_1-\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial z}h_1\right)\overline{e}_2+\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\right)F_2-\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right)F_1\right]\overline{e}_3=$$
$$=\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial z}h_2\right)\overline{e}_1-\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial z}h_1\right)\overline{e}_2+\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\Gamma^2_{21}\right)F_2-\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+\Gamma^1_{12}\right)F_1\right]\overline{e}_3, \tag{7}$$

где $\Gamma^1_{12}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}, \Gamma^2_{21}=\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}$ - символы Кристоффеля 2-го рода [3].

В выражении (7) не учтена зависимость от продольной пространственной координаты z, т.е. $e^{-j\gamma z}$. С учетом этой зависимости частные производные (7) будут:

$$\begin{cases}\frac{\partial F_z}{\partial x_2}=\frac{\partial\left(F_z e^{-j\gamma z}\right)}{\partial x_2}=\frac{\partial\left(F_z\right)}{\partial x_2}e^{-j\gamma z}+\frac{\partial\left(e^{-j\gamma z}\right)}{\partial x_2}F_3=\frac{\partial\left(F_z\right)}{\partial x_2}e^{-j\gamma z},\\ \frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{\partial\left(F_2 e^{-j\gamma z}\right)}{\partial z}=\frac{\partial\left(F_2\right)}{\partial z}e^{-j\gamma z}+\frac{\partial\left(e^{-j\gamma z}\right)}{\partial z}F_2=-j\gamma F_2 e^{-j\gamma z},\\ \frac{\partial F_z}{\partial x_1}=\frac{\partial\left(F_3 e^{-j\gamma z}\right)}{\partial x_1}=\frac{\partial\left(F_z\right)}{\partial x_1}e^{-j\gamma z}+\frac{\partial\left(e^{-j\gamma z}\right)}{\partial x_1}F_3=\frac{\partial\left(F_z\right)}{\partial x_1}e^{-j\gamma z},\\ \frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial\left(F_1 e^{-j\gamma z}\right)}{\partial z}=\frac{\partial\left(F_1\right)}{\partial z}e^{-j\gamma z}+\frac{\partial\left(e^{-j\gamma z}\right)}{\partial z}F_1=-j\gamma F_1 e^{-j\gamma z}.\end{cases} \tag{8}$$

При определении частных производных в (8) учитывалось, что поперечные составляющие вектора $\overline{F}$ не являются функциями от z, а продольная составляющая является функцией от продольной пространственной координаты z.

С учетом вычисленных частных производных (8) и опуская зависимость $e^{-j\gamma z}$, получаем:

$$Rot\overline{F}=\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial F_z}{\partial x_2}+j\gamma F_2\right)\overline{e}_1-\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial F_z}{\partial x_1}+j\gamma F_1\right)\overline{e}_2+\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\Gamma^2_{21}\right)F_2-\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+\Gamma^1_{12}\right)F_1\right]\overline{e}_3. \tag{9}$$

В произвольных ортогональных криволинейных координатах *Div* определяется выражением [4]:

$$Div\overline{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3F_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3h_1F_2)+\frac{\partial}{\partial x}(h_1h_2F_3)\right].$$

Переходя к случаю, когда $x_3=z\ \left(h_3=1\right)$ и при $h_1\neq f\left(z\right),\ h_2\neq f\left(z\right)$, получаем:

$$Div\overline{F}=\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial\left(h_2\right)}{\partial x_1}F_1+\frac{\partial\left(F_1\right)}{\partial x_1}h_2+\frac{\partial\left(h_1\right)}{\partial x_2}F_2+\frac{\partial\left(F_2\right)}{\partial x_2}h_1+\frac{h_1h_2\partial\left(F_z\right)}{\partial z}\right]=\frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\right)F_1+$$
$$+\frac{1}{h_2}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)F_2+\frac{\partial F_z}{\partial z}=\frac{1}{h_1}\left(\Gamma^2_{21}+\frac{\partial}{\partial x_1}\right)F_1+\frac{1}{h_2}\left(\Gamma^1_{12}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)F_2+\frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Учитывая зависимость $e^{-j\gamma z}$ и вычисляя частные производные, как в случае определения *Rot*, окончательно получаем выражение:

$$Div\overline{F}=\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\Gamma^2_{21}\right)F_1+\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+\Gamma^1_{12}\right)F_2-j\gamma F_z. \tag{10}$$

Введем обозначения:

$$\nabla_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1};\ \nabla_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2};\ \delta_1=\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\Gamma^2_{21}\right);\ \delta_2=\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+\Gamma^1_{12}\right). \tag{11}$$

С учетом (11) перепишем выражения (9) и (10) в криволинейных ортогональных системах координат с продольно-регулярной осью:

$$Rot\overline{F} = (\nabla_2 F_z + j\gamma F_2)\bar{e}_1 - (\nabla_1 F_z + j\gamma F_1)\bar{e}_2 + [\delta_1 F_2 - \delta_2 F_1]\bar{e}_3, \tag{12}$$

$$Div\overline{F} = \delta_1 F_1 + \delta_2 F_2 - j\gamma F_z. \tag{13}$$

Выражения для $Rot\overline{F}$, $Div\overline{F}$ входят в систему (1) и описывают характеристики электромагнитной волны в любой криволинейной ортогональной системе координат для случая, когда продольная ось совпадает с осью Z.

Используя (12), в системе уравнений (1) проведем разложения по осям $Rot\overline{H}$ и $Rot\overline{E}$:

$$\begin{cases} \nabla_2 H_z + j\gamma H_2 = j\omega\varepsilon E_1, \\ -(\nabla_1 H_z + j\gamma H_1) = j\omega\varepsilon E_2, \\ \delta_1 H_2 - \delta_2 H_1 = j\omega\varepsilon E_z. \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \nabla_2 E_z + j\gamma E_2 = -j\omega\overline{B}_1 = -j\omega(\mu_{11}H_1 + jkH_2 + jlH_z), \\ \nabla_1 E_z + j\gamma E_1 = j\omega\overline{B}_2 = j\omega(-jkH_1 + \mu_{22}H_2 + jmH_z), \\ \delta_1 E_2 - \delta_2 E_1 = -j\omega\overline{B}_z = -j\omega(-jlH_1 - jmH_2 + \mu_{33}H_z), \end{cases} \tag{15}$$

где $k, l, m, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$- компоненты тензора магнитной проницаемости феррита при произвольном намагничивании; $w$- циклическая частота.

Из формулы (13) получим $div\overline{B}$ для произвольного намагничивания:

$$\begin{aligned} div\overline{B} &= \delta_1 B_1 + \delta_2 B_2 - j\gamma B_z = \delta_1(\mu_{11}H_1 + jkH_2 + jlH_z) + \\ &+ \delta_2(-jkH_1 + \mu_{22}H_2 + jmH_z) - j\gamma(-jlH_1 - jmH_2 + \mu_{33}H_z) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

После компоновки выражение (2.16) примет вид:

$$\begin{aligned} div\overline{B} &= jk(\delta_1 H_2 - \delta_2 H_1) + \delta_1(\mu_{11}H_1 + jlH_z) + \delta_2(\mu_{22}H_2 + jmH_z) - \\ &- j\gamma(-jlH_1 - jmH_2 + \mu_{33}H_z) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

В первое слагаемое (17) подставим третье уравнение системы (14):

$$k\omega\varepsilon E_z + j\gamma(-jlH_1 - jmH_2 + \mu_{33}H_z) = \delta_1(\mu_{11}H_1 + jlH_z) + \delta_2(\mu_{22}H_2 + jmH_z). \tag{18}$$

Вначале получим уравнение Гельмгольца НЕ – волны. Для этого выразим $E_1$ и $E_2$ из системы (14):

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla_2 H_z + \dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}H_2, \\ E_2 = -\dfrac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla_1 H_z - \dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}H_1. \end{cases} \tag{19}$$

Выражение (19) подставим в первые два уравнения системы (15):

$$\begin{cases} \nabla_2 E_z - \dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\nabla_1 H_z - \dfrac{j\gamma^2}{\omega\varepsilon}H_1 = -j\omega(\mu_{11}H_1 + jkH_2 + jlH_z), \\ \nabla_1 E_z + \dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\nabla_2 H_z + \dfrac{j\gamma^2}{\omega\varepsilon}H_2 = j\omega(-jkH_1 + \mu_{22}H_2 + jmH_z). \end{cases} \tag{20}$$

На первое уравнение системы (20) воздействуем оператором $\delta_1$, а на второе уравнение (20) – оператором $\delta_2$:

$$\begin{cases} \delta_1\nabla_2 E_z - \dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\delta_1\nabla_1 H_z - \dfrac{j\gamma^2}{w\varepsilon}\delta_1 H_1 + j\omega\delta_1\left(\mu_{11}H_1 + jkH_2 + jlH_z\right) = 0, \\ \delta_2\nabla_1 E_z + \dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\delta_2\nabla_2 H_z + \dfrac{j\gamma^2}{w\varepsilon}\delta_2 H_2 - j\omega\delta_2\left(-jkH_1 + \mu_{22}H_2 + jmH_z\right) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

В последнем выражении для удобства отдельно определим дифференциальные операторы 2-го порядка. Определим дифференциальный оператор 2-го порядка $\delta_1\nabla_1$:

$$\begin{aligned} \delta_1\nabla_1 &= \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{21}^2\right)\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial (h_1)^{-1}}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \\ &+ \frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{h_1}\left(-\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1} = \\ & \frac{1}{h_1^2}\left(-\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1^2}\frac{\partial}{\partial x_1} = -\frac{1}{h_1^2}\Gamma_{11}^1\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1^2}\frac{\partial}{\partial x_1} = \\ &= \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1\right)\frac{\partial}{\partial x_1} = \Delta_{11}. \end{aligned} \tag{22}$$

Определим дифференциальный оператор 2-го порядка $\delta_2\nabla_2$:

$$\begin{aligned} \delta_2\nabla_2 &= \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_{12}^1\right)\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial (h_2)^{-1}}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \\ &+ \frac{1}{h_2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{h_2}\left(-\frac{1}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_1}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2} = \\ &= \frac{1}{h_2^2}\left(-\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2} = -\frac{1}{h_2^2}\Gamma_{22}^2\frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2} = \\ &= \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2} = \Delta_{22}. \end{aligned} \tag{23}$$

Определим дифференциальный оператор 2-го порядка $\delta_1\nabla_2$:

$$\begin{aligned} \delta_1\nabla_2 &= \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{21}^2\right)\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial (h_2)^{-1}}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \\ &+ \frac{1}{h_1}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{h_1}\left(-\frac{1}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2} = \\ &= -\frac{1}{h_1h_2}\Gamma_{21}^2\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{h_1h_2}\left(-\Gamma_{21}^2 + \frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{21}^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2} = \\ &= \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} = \Delta_{12}. \end{aligned} \tag{24}$$

Определим дифференциальный оператор 2-го порядка $\delta_2\nabla_1$:

$$\delta_2\nabla_1=\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+\Gamma_{12}^1\right)\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)=\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\frac{\Gamma_{12}^1}{h_2}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{x_1}=\frac{1}{h_2}\frac{\partial(h_1)^{-1}}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}+$$
$$+\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\frac{\Gamma_{12}^1}{h_2}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{1}{h_2}\left(-\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\Gamma_{12}^1}{h_2}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}= \quad (25)$$
$$=-\frac{1}{h_1h_2}\Gamma_{12}^1\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\Gamma_{12}^1}{h_2}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{1}{h_1h_2}\left(-\Gamma_{12}^1+\frac{\partial}{\partial x_2}+\Gamma_{12}^1\right)\frac{\partial}{\partial x_1}=$$
$$=\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}=\Delta_{21}.$$

Получили, что дифференциальные операторы $\Delta_{12}=\Delta_{21}$.

Учитывая (22)-(25), перепишем (21):

$$\begin{cases}\Delta_{12}E_z-\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\Delta_{11}H_z-\dfrac{j\gamma^2}{\omega\varepsilon}\delta_1H_1+j\omega\delta_1\left(\mu_{11}H_1+jkH_2+jlH_z\right)=0,\\ \Delta_{21}E_z+\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\Delta_{22}H_z+\dfrac{j\gamma^2}{\omega\varepsilon}\delta_2H_2-j\omega\delta_2\left(-jkH_1+\mu_{22}H_2+jmH_z\right)=0.\end{cases} \quad (26)$$

Из первого уравнения (26) вычтем второе и изменим знак полученного выражения:

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\left(\Delta_{11}H_z+\Delta_{22}H_z\right)+\frac{j\gamma^2}{\omega\varepsilon}\left(\delta_1H_1+\delta_2H_2\right)+\omega k\left(\delta_1H_2-\delta_2H_1\right)-$$
$$-j\omega\left[\delta_1\left(\mu_{11}H_1+jlH_z\right)+\delta_2\left(\mu_{22}H_2+jmH_z\right)\right]=0. \quad (27)$$

Вместо третьего слагаемого (27) подставим третье уравнение (14), а вместо четвертого слагаемого (27) подставим (18):

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\left(\Delta_{11}H_z+\Delta_{22}H_z\right)+\frac{j\gamma^2}{\omega\varepsilon}\left(\delta_1H_1+\delta_2H_2\right)+\omega k\left(jw\varepsilon E_z\right)-$$
$$-j\omega\left[k\omega\varepsilon E_z+j\gamma\left(-jlH_1-jmH_2+\mu_{33}H_z\right)\right]=0. \quad (28)$$

Умножив выражение (28) на $\dfrac{\omega\varepsilon}{\gamma}$, получим:

$$\Delta_{11}H_z+\Delta_{22}H_z+j\gamma\left(\delta_1H_1+\delta_2H_2\right)-j\omega^2\varepsilon\left(lH_1+mH_2\right)+\omega^2\varepsilon\mu_{33}H_z=0. \quad (29)$$

Выражение (29) является обобщенным уравнением Гельмгольца НЕ- волны для гиротропного волновода с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании.

Для получения обобщенного уравнение Гельмгольца ЕН – волны из первого уравнения системы (15) выразим $H_2$, а из второго – $H_1$:

$$\begin{cases}H_2=\dfrac{\nabla_2E_z}{\omega k}+\dfrac{j\gamma}{\omega k}E_2+\dfrac{j\mu_{11}}{k}H_1-\dfrac{l}{k}H_z;\\ H_1=\dfrac{\nabla_1E_z}{\omega k}+\dfrac{j\gamma}{\omega k}E_1-\dfrac{j\mu_{22}}{k}H_2+\dfrac{m}{k}H_z.\end{cases} \quad (30)$$

В первое уравнение (30) подставим второе и после преобразований получим:

$$H_2=\frac{k}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}\nabla_2E_z+\frac{j\gamma k}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}E_2+\frac{j\mu_{11}}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}\nabla_1E_z-$$
$$-\frac{\gamma\mu_{11}}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}E_1+\frac{j\mu_{11}m}{k^2-\mu_{11}\mu_{22}}H_z-\frac{lk}{k^2-\mu_{11}\mu_{22}}H_z. \quad (31)$$

Во второе уравнение (30) подставим первое и после преобразований получим:

$$H_1=\frac{k}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}\nabla_1 E_z+\frac{j\gamma k}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}E_1-\frac{j\mu_{22}}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}\nabla_2 E_z-$$
$$-\frac{\gamma\mu_{22}}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}E_2+\frac{j\mu_{22}l}{k^2-\mu_{11}\mu_{22}}H_z+\frac{mk}{k^2-\mu_{11}\mu_{22}}H_z. \qquad (32)$$

На выражение (31) воздействуем оператором $\delta_1$, а на (32) - $\delta_2$. При этом в полученных выражениях используем (24) и (25):

$$\delta_1 H_2=\frac{k}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}\Delta_{12}E_z+\frac{j\gamma k}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}\delta_1 E_2+\frac{j\mu_{11}}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}\Delta_{11}E_z-$$
$$-\frac{\gamma\mu_{11}}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}\delta_1 E_1+\frac{j\mu_{11}m}{k^2-\mu_{11}\mu_{22}}\delta_1 H_z-\frac{lk}{k^2-\mu_{11}\mu_{22}}\delta_1 H_z. \qquad (33)$$

$$\delta_2 H_1=\frac{k}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}\Delta_{12}E_z+\frac{j\gamma k}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}\delta_2 E_1-\frac{j\mu_{22}}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}\Delta_{22}E_z-$$
$$-\frac{\gamma\mu_{22}}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}\delta_2 E_2+\frac{j\mu_{22}l}{k^2-\mu_{11}\mu_{22}}\delta_2 H_z+\frac{mk}{k^2-\mu_{11}\mu_{22}}\delta_2 H_z. \qquad (34)$$

Из (33) вычтем (34):

$$\delta_1 H_2-\delta_2 H_1=\frac{j\gamma k\left(\delta_1 E_2-\delta_2 E_1\right)}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}+\frac{j\left(\mu_{11}\Delta_{11}E_z+\mu_{22}\Delta_{22}E_z\right)}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}-$$
$$-\frac{\gamma\left(\mu_{11}\delta_1 E_1+\mu_{22}\delta_2 E_2\right)}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}+\frac{j\left(\mu_{11}m\delta_1-\mu_{22}l\delta_2\right)}{k^2-\mu_{11}\mu_{22}}H_z-\frac{lk\delta_1+mk\delta_2}{k^2-\mu_{11}\mu_{22}}H_z. \qquad (35)$$

В левую часть (35) подставим третье уравнение системы (14), а в первое слагаемое (35) – третье уравнение системы (15):

$$j\omega\varepsilon E_z=\frac{j\gamma k\left(-wlH_1-wmH_2-jw\mu_{33}H_z\right)}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}+\frac{j\left(\mu_{11}\Delta_{11}E_z+\mu_{22}\Delta_{22}E_z\right)}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}-$$
$$-\frac{\gamma\left(\mu_{11}\delta_1 E_1+\mu_{22}\delta_2 E_2\right)}{\omega\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)}+\frac{j\left(\mu_{11}m\delta_1-\mu_{22}l\delta_2\right)}{k^2-\mu_{11}\mu_{22}}H_z-\frac{lk\delta_1+mk\delta_2}{k^2-\mu_{11}\mu_{22}}H_z. \qquad (36)$$

Умножив выражение (36) на мнимую единицу $j$, после преобразования получим:

$$\mu_{11}\Delta_{11}E_z+\mu_{22}\Delta_{22}E_z+j\gamma\left(\mu_{11}\delta_1 E_1+\mu_{22}\delta_2 E_2\right)+\omega\left(\mu_{11}m\delta_1-\mu_{22}l\delta_2\right)H_z+$$
$$+\gamma k\omega\left(-lH_1-mH_2-j\mu_{33}H_z\right)-\omega^2\varepsilon\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)E_z+j\omega\left(lk\delta_1+mk\delta_2\right).H_z=0. \qquad (37)$$

Выражение (37) представляет собой обобщенное уравнение Гельмгольца ЕН-волны для гиротропного волновода с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании.

**Уравнения Гельмгольца НЕ- волны**

Для вывода частных уравнений Гельмгольца воспользуемся ортогональной системой координат:

$$g_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если} \quad i=j;\\ 0, & \text{если} \quad i\neq j,\end{cases}$$

где $g_{ij}$ - фундаментальный метрический тензор;

$\delta_{ij}$ - символы Кронекера.

Метрика данной системы координат является следующей [2]:

$$dS^2=\left(\mathrm{h}_1 dx_1\right)^2+\left(\mathrm{h}_2 dx_2\right)^2+\left(\mathrm{h}_3 dx_3\right)^2,$$

где $h_i$ - коэффициенты Ламэ,

$dx_1, dx_2, dx_3$- бесконечно малые приращения по осям криволинейной ортогональной системы координат.

Рассмотрим волновод в ортогональной системе координат, в которой одна из осей совпадает с одной из осей декартовой системы координат:

$$\begin{cases} x_3 = z; \\ h_3 = 1. \end{cases}$$

Тогда с учетом (3) в этой системе координат контур поперечного сечения будет кривом 2-го порядка, описываемым двумя коэффициентами Ламе: $\mathrm{h}_1$ и $\mathrm{h}_2$. При этом возможны следующее [5]:

а) если коэффициенты будут постоянными, получится прямоугольный контур, описываемый в декартовой системе координат;

б) если $\mathrm{h}_2 \neq 1$, получится круглое сечение волновода, описываемое в цилиндрической системе координат;

в) если $\mathrm{h}_1 \neq 1$, $\mathrm{h}_2 \neq 1$, то поперечное сечение волновода будет коническим, описываемым кривой 2-го порядка.

Таким образом, в общем случае поперечное сечение волновода будет описываться в эллиптических, параболических или каких-либо других ортогональных координатах.

Далее из выражение (29) выведем уравнение Гельмгольца НЕ- волны для гиротропного волновода с произвольной ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании.

При продольном намагничивании в тензоре магнитной проницаемости феррита $\mu_{33} = \mu_{\parallel}, \;\; \mu_{11} = \mu_{22} = \mu, \;\; l = m = 0, \;\; k \neq 0$. В этом случае выражение (29) примет вид:

$$\Delta_{11} H_z + \Delta_{22} H_z + j\gamma(\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) + \omega^2 \varepsilon \mu_{\parallel} H_z = 0. \qquad (38)$$

Также при продольном намагничивании формула (18) для $div\bar{B}$ примет вид:

$$\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2 = \frac{\omega \varepsilon k E_z + j\gamma \mu_{\parallel} H_z}{\mu}. \qquad (39)$$

Подставив (39) в (38), получим:

$$\Delta_{11} H_z + \Delta_{22} H_z + \left( \omega^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j\gamma \omega \varepsilon \frac{k}{\mu} E_z = 0. \qquad (40)$$

Выражение (40) представляет собой уравнение Гельмгольца НЕ- волны для гиротропного волновода с произвольной ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании.

С целью тестирования обобщенного уравнения (29) выведем из (40) известные частные уравнения Гельмгольца для гиротропных прямоугольных и круглых волноводов при продольном намагничивании [1].

Для вывода частного уравнения Гельмгольца для гиротропного прямоугольного волновода при продольном намагничивании из (2) и (3) получим коэффициенты Ламэ и символы Кристоффеля для декартовой системы координат $(x_1 = x; \;\; x_2 = y; \;\; x_3 = z)$:

$$\begin{cases} h_1 = h_2 = h_3 = 1; \\ \Gamma_{21}^{2} = \Gamma_{12}^{1} = 0. \end{cases} \qquad (41)$$

Тогда дифференциальные операторы 2-го порядка (22) и (23) с учетом (41) примут вид:

$$\begin{cases} \delta_1 \nabla_1 = \Delta_{11} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}; \\ \delta_2 \nabla_2 = \Delta_{22} = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{cases} \tag{42}$$

Подставив (42) в (40) получим известное частное уравнение Гельмгольца НЕ – волны в гиротропного прямоугольного волновода при продольном намагничивании [1]:

$$\frac{\partial^2 H_Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_Z}{\partial y^2} + \left(\omega^2 \varepsilon \mu_{\|} - \frac{\mu_{\|}}{\mu}\gamma^2\right) H_Z + j\gamma\omega\varepsilon \frac{k}{\mu} E_Z = 0.$$

Для вывода частного уравнения Гельмгольца для гиротропного круглого волновода при продольном намагничивании из (2) и (3) получим коэффициенты Ламэ и символы Кристоффеля для цилиндрической системы координат $(x_1 = r; \quad x_2 = \varphi; \quad x_3 = z)$ :

$$\begin{cases} h_1 = h_3 = 1; h_2 = r; \\ \varGamma^1_{12} = 0; \varGamma^2_{21} = \dfrac{1}{r}. \end{cases} \tag{43}$$

Тогда дифференциальные операторы 2-го порядка (22) и (23) с учетом (43) примут вид:

$$\begin{cases} \delta_1 \nabla_1 = \Delta_{11} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}; \\ \delta_2 \nabla_2 = \Delta_{22} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{cases} \tag{44}$$

Подставив (44) в (40) получим известное уравнение Гельмгольца НЕ – волны в гиротропного круглого волновода при продольном намагничивании [1]:

$$\frac{\partial^2 H_Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial \varphi^2} + \left(\omega^2 \varepsilon \mu_{\|} - \frac{\mu_{\|}}{\mu}\gamma^2\right) H_Z + j\gamma\omega\varepsilon \frac{k}{\mu} E_Z = 0.$$

Выведем новое частное уравнение Гельмгольца для гиротропного эллиптического волновода при продольном намагничивании. Для этого из (2) и (3) получим коэффициенты Ламэ и символы Кристоффеля для эллиптической системы координат $(x_1 = \xi; \quad x_2 = \varphi; \quad x_3 = z)$:

$$\begin{cases} h_1 = h_2 = ed; \quad h_3 = 1; \\ \varGamma^1_{12} = \dfrac{Sin 2\xi}{2d^2}; \quad \varGamma^2_{21} = \dfrac{Sh 2\xi}{2d^2}, \end{cases} \tag{45}$$

где $e$ - фокус эллипса;

$d^2 = ch^2 \xi - \cos^2 \varphi$.

Тогда дифференциальные операторы 2-го порядка (22) и (23) с учетом (45) примут вид:

$$\begin{cases} \delta_1 \nabla_1 = \Delta_{11} = \dfrac{1}{e^2 d^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}; \\ \delta_2 \nabla_2 = \Delta_{22} = \dfrac{1}{e^2 d^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{cases} \tag{46}$$

Подставив (46) в (40) получим новое частное уравнение Гельмгольца НЕ – волны для гиротропного эллиптического волновода при продольном намагничивании:

$$\frac{\partial^2 H_Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_Z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( \omega^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_Z + j e^2 d^2 \gamma \omega \varepsilon \frac{k}{\mu} E_Z = 0. \qquad (47)$$

**Уравнения Гельмгольца ЕН- волны**

Для вывода уравнения Гельмгольца ЕН- волны для гиротропного волновода с произвольной ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании обратимся к (37). При продольном намагничивании выражение (37) примет вид:

$$\mu \Delta_{11} E_z + \mu \Delta_{22} E_z + j \gamma \mu \left( \delta_1 E_1 + \delta_2 E_2 \right) - j \gamma k \omega \mu_{\parallel} H_z - \omega^2 \varepsilon \left( k^2 - \mu^2 \right) E_z = 0. \qquad (48)$$

Из третьего уравнения системы (1) известно (при отсутствии зарядов):

$$div \overline{E} = 0. \qquad (49)$$

Далее, используя (13) распишем (49):

$$\delta_1 E_1 + \delta_2 E_2 = j \gamma E_z. \qquad (50)$$

Подставив (50) в (48) и разделив полученное выражение на $\mu$, получим уравнение Гельмгольца ЕН- волны для гиротропного волновода с произвольной ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании:

$$\Delta_{11} E_z + \Delta_{22} E_z + \left( \omega^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 \right) E_z - j \gamma k \omega \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0, \qquad (51)$$

где $\mu_{\perp} = \dfrac{\mu^2 - k^2}{\mu}$.

Для тестирования обобщенного уравнения (37) перейдем к конкретным формам поперечного сечения волновода. Подставив (42) в (51) получим известное уравнение Гельмгольца ЕН – волны для гиротропного прямоугольного волновода при продольном намагничивании [1]:

$$\frac{\partial^2 E_Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial y^2} + \left( \omega^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 \right) E_Z - j \gamma k \omega \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_Z = 0.$$

Подставив (44) в (51) получим известное уравнение Гельмгольца ЕН – волны для гиротропного круглого волновода при продольном намагничивании [1]:

$$\frac{\partial^2 E_Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 \right) E_Z - j \gamma k w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_Z = 0.$$

Таким образом, тестирование полученных обобщенных уравнений Гельмгольца (29) и (37) показывают правильность этих уравнений.

Далее подставив (46) в (51) получим еще одно новое уравнение Гельмгольца ЕН– волны для гиротропного эллиптического волновода при продольном намагничивании:

$$\frac{\partial^2 E_Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( \omega^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 \right) E_Z - j e^2 d^2 \gamma k \omega \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_Z = 0. \qquad (52)$$

Основные выводы таковы:

1. Получены обобщенные уравнение Гельмгольца НЕ- волны (29) и ЕН- волны (37) для гиротропного волновода с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании;
2. Получены общие уравнение Гельмгольца (40) и (51) для гиротропного волновода с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при продольном намагничивании для НЕ- и ЕН- волн, соответственно;

3. Получены частные уравнения Гельмгольца (47) и (52) для гиротропного эллиптического волновода при продольном намагничивании для НЕ- и ЕН- волн , соответственно.

**Литература**


1. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах // Л.: Госэнергоиздат, 1963. 664 с.
2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров // М:Изд. «Наука»,1967. 780 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике // М.: Наука, 1973. 831 с.
4. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн // М.: Наука, 1973. 607 с.
5. Базаров Б.Б. Обобщенная модель гиротропных волноводов // Сборник научных трудов. Серия: Технические науки. ВСГТУ. Улан-Удэ. 1997. Вып.5. Т.1. С. 192-204.