

Асимптотическое решение уравнения Гельмгольца в трехмерном слое переменной толщины с локализованной правой частью.

П.Н. Петров^{1,2,*}, С.Ю. Доброхотов^{1,2,**}

¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

e.mail: * petr.petrov@phystech.edu, ** dohr@ipmnet.ru

В работе построена асимптотика решения уравнения Гельмгольца в трехмерном слое переменной толщины с локализованной правой частью:

$$\begin{cases} (\hbar^2 \Delta + n^2(x, y))u = F\left(\frac{x - \xi_1}{\mu}, \frac{y - \xi_2}{\mu}\right)g\left(\frac{z - z_0}{\mu}\right) \\ u|_{z=d_1(x, y)} = 0 \\ u|_{z=d_2(x, y)} = 0 \end{cases}$$

Здесь коэффициент $n^2(x, y)$ задающий границу слоя функции $d_1(x, y) < d_2(x, y)$ и источник функции $F(x, y), g(z)$ предполагает гладкими функции всех своих аргументов. Кроме того, предполагаются, что $F(x, y), g(z)$ быстро убывают на бесконечности. Например, в качестве $F(x, y), g(z)$ можно выбрать гауссовы экспоненты. Положительные параметры h и μ предполагаются малыми. Числа (ξ_1, ξ_2, z_0) определяют координаты точки, в окрестности которой локализован источник.

С помощью операторного метода [1] и недавно развитого подхода [2] в предположении отсутствия “ловушечных” состояний и выполнения условий излучения на бесконечности (типа условия Зоммерфельда) в работе строится асимптотическое решение сформулированной задачи при $1 \gg \mu \geq h$. Асимптотика решения представляется в виде разложения на конечное число мод, каждая мода связана с парой лагранжевых многообразий. Одно из соответствующих многообразий определяет локализованную (“сингулярную”) в окрестности вертикального отрезка $(x = \xi_1, y = \xi_2)$ часть решения, а второе - “размазанную” по всему слою осциллирующую (“волновую”) часть решения (с учетом возможного появления каустик и фокальных точек). В пределе $F(x, y), g(z) \rightarrow \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ полученные формулы описывают асимптотику функции Грина для рассматриваемого уравнения Гельмгольца, однако в отличие от такой асимптотики полученная формула позволяет достаточно явно описать влияние формы источника на волновую часть решения.

Литература

1. V.V. Belov, S. Yu Dobrokhотов, and T. Ya Tudorovskiy. "Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics." *Journal of Engineering Mathematics* 55.1-4 (2006): 183-237.
2. A. Yu. Anikin, et al. "The Maslov canonical operator on a pair of Lagrangian manifolds and asymptotic solutions of stationary equations with localized right-hand sides." *Doklady Mathematics*. Vol. 96. No. 1. Pleiades Publishing, 2017.