

## Решение задачи Дирихле для продольно-намагниченного гиротропного эллиптического волновода

Г.Б. Итигилов, Д.Ш. Ширапов, Кравченко В.А.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления. 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В. E-mail: [shir48@mail.ru](mailto:shir48@mail.ru)

Решены дисперсионные уравнения являющиеся результатами решения задачи Дирихле для уравнений Гельмгольца гибридных электромагнитных волн распространяющихся в продольно-намагниченном гиротропном эллиптическом волноводе. С использованием полученных решений дисперсионных уравнений исследованы зависимости постоянных распространения от напряженности намагничивающего поля для различных намагниченностей феррита.

The dispersion equations that are the results of solving the Dirichlet problem for the Helmholtz equations of hybrid electromagnetic waves propagating in a longitudinally magnetized gyrotropic elliptical waveguide are solved. The dependences of propagation constants on the strength of the magnetizing field for different magnetizations of ferrite are investigated using the obtained solutions of dispersion equations.

### Введение

Для исследования структуры электромагнитного поля продольно-намагниченных гиротропных эллиптических волноводов и различных характеристик электромагнитных волн (ЭМВ), распространяющихся в таких волноводах необходимо поставить и решить задачу Дирихле для соответствующих уравнений Гельмгольца [1]. В работе [2] такая задача Дирихле была поставлена и решена, но не доведена до практического применения, вследствие трудности вычисления собственных значений и соответствующих корней обыкновенных и модифицированных функций Матье [3, 4], входящих в дисперсионные уравнения.

Целью данной статьи является решение вышеупомянутых дисперсионных уравнений [2] и анализ полученных в результате решения некоторых характеристик гибридных электромагнитных волн распространяющихся в продольно-намагниченном гиротропном эллиптическом волноводе.

### 1. Задача Дирихле для уравнений Гельмгольца

Для уравнений Гельмгольца, соответствующих продольно-намагниченному гиротропному эллиптическому волноводу [1], задача Дирихле для  $EH$ -обыкновенной и  $HE$ -необыкновенной волн является следующей [2]

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 (\omega^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - j e^2 d^2 \gamma \omega \mu_{\parallel} \frac{k}{\mu} H_z = 0, \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( \omega^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j e^2 d^2 \gamma \omega \varepsilon \frac{k}{\mu} E_z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

при условии Дирихле для электрического поля на границе бесконечно проводящего продольно-намагниченного эллиптического волновода

$$E_z |_{\xi=\xi_0} = E_{\varphi} |_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $(\xi, \varphi, z)$  – координаты эллиптической системы,  $E_\varphi$  и  $E_z$  – компоненты электрического поля,  $H_z$  – продольная компонента магнитного поля,  $e$  – фокусное расстояние эллипса,  $d = \sqrt{ch^2\xi - \cos^2\varphi} = \sqrt{0,5(ch2\xi - \cos 2\varphi)}$  – геометрический параметр,  $\omega$  – циклическая частота,  $\varepsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость феррита,  $\gamma$  – постоянная распространения,  $j$  – мнимое число,  $k = \mu_0 \frac{\omega\omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2}$  и  $\mu = \mu_0 - \mu_0 \frac{\omega_0\omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2}$  – тензор магнитной проницаемости феррита,  $\mu_\perp = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная,  $\mu_\parallel \approx \mu_0$ ,  $\omega_0 = \mu_0 Y H_0$  – частота ферромагнитного резонанса,  $Y = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг – гиромангнитное отношение,  $H_0$  – напряженность постоянного магнитного поля,  $\omega_m = \mu_0 Y M_0$ ,  $M_0$  – намагниченность насыщения феррита.

Заметим, что система дифференциальных уравнений (1) описывает распространение гибридных ЭМВ, возникающих из-за гиротропности области распространения [5-7].

Решением задачи Дирихле (1) и (2), полученные в [2] является дисперсионное уравнение для четных волн

$$\begin{aligned} & \left[ - \left( k_\perp^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2} \right) \frac{4q_2}{e^2} \frac{Ce'_m(\xi_0, q_1)}{Ce_m(\xi_0, q_1)} + \left( k_\perp^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2} \right) \frac{4q_1}{e^2} \frac{Ce'_m(\xi_0, q_2)}{Ce_m(\xi_0, q_2)} \right] + \\ & + j \left[ \frac{a^2}{\omega^2 \varepsilon k} \left( k_\perp^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2} \right) \left( k_\perp^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2} \right) \left\{ \frac{ce'_m(\varphi, q_2)}{ce_m(\varphi, q_2)} - \frac{ce'_m(\varphi, q_1)}{ce_m(\varphi, q_1)} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma^2}{\mu} \left\{ \frac{ce'_m(\varphi, q_1)}{ce_m(\varphi, q_1)} \left( k_\perp^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2} \right) - \frac{ce'_m(\varphi, q_2)}{ce_m(\varphi, q_2)} \left( k_\perp^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2} \right) \right\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $Ce(\xi_0, q_{1,2})$ ,  $Ce'(\xi_0, q_{1,2})$  – присоединенные (модифицированные) функции Матье 1-го рода (с целым индексом) и их производные,  $ce(\varphi, q_{1,2})$ ,  $ce'(\varphi, q_{1,2})$  – обыкновенные функции Матье 1-го рода целого порядка  $m$  и их производные.

После проведения нижеследующей замены в (3)

$$\begin{cases} Ce(\xi_0, q_{1,2}) \rightarrow Se(\xi_0, q_{1,2}), Ce'(\xi_0, q_{1,2}) \rightarrow Se'(\xi_0, q_{1,2}), \\ ce(\varphi, q_{1,2}) \rightarrow se(\varphi, q_{1,2}), ce'(\varphi, q_{1,2}) \rightarrow se'(\varphi, q_{1,2}), \end{cases}$$

получим дисперсионное уравнение для нечетных волн

$$\begin{aligned}
& \left[ - \left( k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2} \right) \frac{4q_2}{e^2} \frac{Se'_m(\xi_0, q_1)}{Se_m(\xi_0, q_1)} + \left( k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2} \right) \frac{4q_1}{e^2} \frac{Se'_m(\xi_0, q_2)}{Se_m(\xi_0, q_2)} \right] + \\
& + j \left[ \frac{a^2}{\omega^2 \varepsilon k} \left( k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2} \right) \left( k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2} \right) \left\{ \frac{se'_m(\varphi, q_2)}{se_m(\varphi, q_2)} - \frac{se'_m(\varphi, q_1)}{se_m(\varphi, q_1)} \right\} + \right. \\
& \left. + \frac{\gamma^2}{\mu} \left\{ \frac{se'_m(\varphi, q_1)}{se_m(\varphi, q_1)} \left( k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2} \right) - \frac{se'_m(\varphi, q_2)}{se_m(\varphi, q_2)} \left( k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2} \right) \right\} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где  $Se(\xi_0, q_{1,2})$  и  $Se'(\xi_0, q_{1,2})$  – нечетные присоединенные (модифицированные) функции Матъе 1-го рода (с целым индексом) и их производные,  $se(\varphi, q_{1,2})$  и  $se'(\varphi, q_{1,2})$  – нечетные обыкновенные функции Матъе 1-го рода целого порядка  $m$  и их производные.

## 2. Решение дисперсионных уравнений

Для исследования характеристик распространяющихся в продольно-намагниченном гиротропном эллиптическом волноводе гибридных ЭМВ и пространственной структуры электромагнитного поля необходимо получить решения дисперсионных уравнений (3) и (4), которые заключаются в определении собственных значений и соответствующих им корней, обыкновенных и модифицированных функций Матъе, входящих в дисперсионные уравнения. Отметим, что при вычислении собственных значений и соответствующих корней функций Матъе численными методами встречаются определенные трудности. Для преодоления этих трудностей была разработана программа уточненного вычисления всех корней обыкновенных и модифицированных функций Матъе на заданном интервале на основе стандартного программного пакета Maple [9].

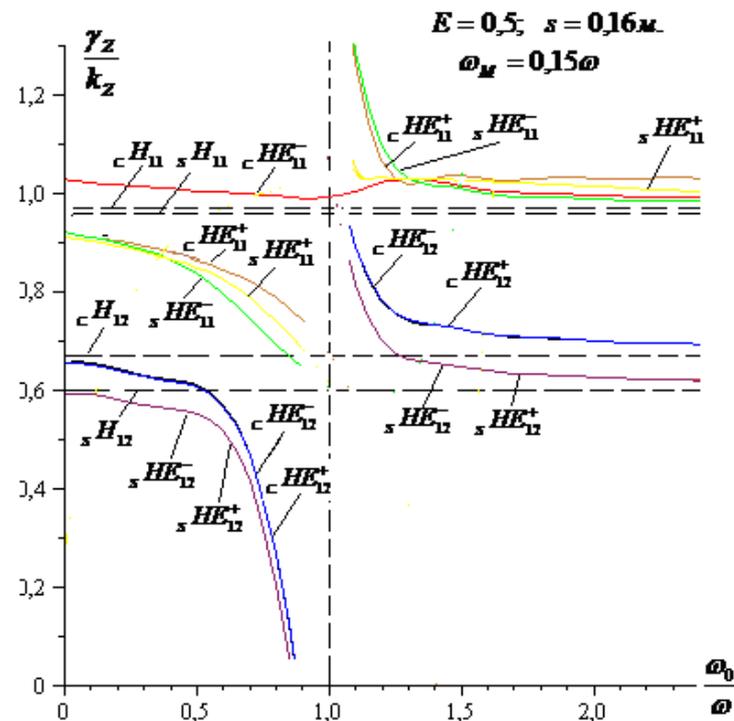
Полученные решения дисперсионных уравнений (3) и (4) позволяют построить графики зависимостей  $\gamma = f(l, k, \mu, H_0, M_0)$ , где  $l$  – геометрические параметры направляющей системы ( $e$  и  $d$ );  $k, \mu$  – компоненты тензора магнитной проницаемости феррита;  $M_0$  – намагниченность феррита;  $H_0$  – напряженность внешнего намагничивающего магнитного поля.

Обычно при анализе дисперсионных уравнений численно получают дисперсионные характеристики направляющей системы при различных геометрических параметрах волновода, напряженности намагничивающего поля, намагниченности ферритового заполнения, а также определяются частота отсечки (в данном случае  $\gamma=0$ ), наиболее эффективно работающие моды (гармоники), что позволяет построить эпюры распределения полей внутри волновода.

В работе приведены первые результаты решения дисперсионных уравнений (3) и (4) при постоянном эксцентриситете эллипса с разной намагниченностью насыщения феррита. Появление типов волн (мод) зависит от эксцентриситета эллипса, что является особенностью эллиптических волноводов [10], и что дает возможность выбора режима работы волновода. В данном случае, размер направляющей системы выбран так, чтобы при отсутствии внешнего магнитного поля в направляющей системе могли распространяться несколько типов волн.

На рис. 1–4 приведены результаты решения дисперсионных уравнений (3), (4) при  $\varphi=45^\circ$  и  $\omega = 6,28 \cdot 10^{10}$  Гц. Графики на рис. 1–4 показывают зависимости постоянной распространения гибридных волн от напряженности намагничивающего поля при постоянном эксцентриситете эллипса  $E$  и для разных частот  $\omega_m$ , связанных с

намагниченностью феррита. На всех рисунках по оси X отложена намагниченность внешнего постоянного магнитного поля  $\frac{\omega_0}{\omega}$ , а по оси Y – нормированная постоянная распространения  $\frac{\gamma_z}{k_z}$ . Здесь  $\gamma_z$  – постоянная распространения (вычисляется численно из дисперсионных уравнений),  $k_z$  – волновое число в безграничной немагнитной ферритовой среде.



**Рис.1.** Зависимость постоянной распространения HE- волн от напряженности намагничивающего поля при  $E=0,5$  и  $\omega_m = 0,15\omega$ . Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  ${}_c H_{11}, {}_s H_{11}, {}_c H_{12}, {}_s H_{12}$ , где нижние индексы «с», «s» означают четную и нечетную моды. Вертикальная пунктирная линия соответствует ферромагнитному резонансу.

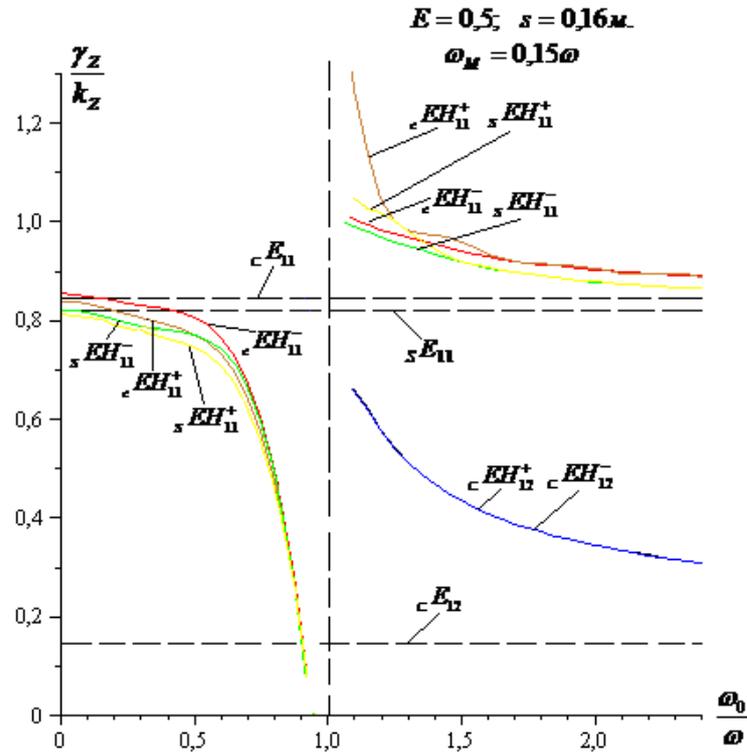


Рис.2. Зависимость постоянной распространения EH- волн от напряженности намагничивающего поля при  $E=0,5$  и  $\omega_m = 0,15\omega$

Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  $cE_{11}$ ,  $sE_{11}$ ,  $cE_{12}$ .

Из графиков на рис. 1-4 следуют, что любая электромагнитная волна, распространяющаяся в гиротропном эллиптическом волноводе вдоль постоянного магнитного поля распадается на две независимые друг от друга волны, имеющие разные постоянные распространения, например, волна  $cHE_{11}$  распадается на волны  $cHE_{11}^+$  и  $cHE_{11}^-$ . Индексом «+» обозначается волна правого вращения, а «-» – левого вращения. По мере распространения между этими волнами будет набегать фазовый сдвиг равный [6]

$$\varphi = \left( \frac{\gamma_z^+ - \gamma_z^-}{2} \right) Z, \quad (5)$$

где  $\gamma_z^+$ ,  $\gamma_z^-$  – постоянные распространения волн с правым и левым вращениями соответственно,  $Z$  – расстояние.

Сознательно изменяя величину напряженности внешнего продольного магнитного поля, можно регулировать фазовые сдвиги волн левого и правого вращений.

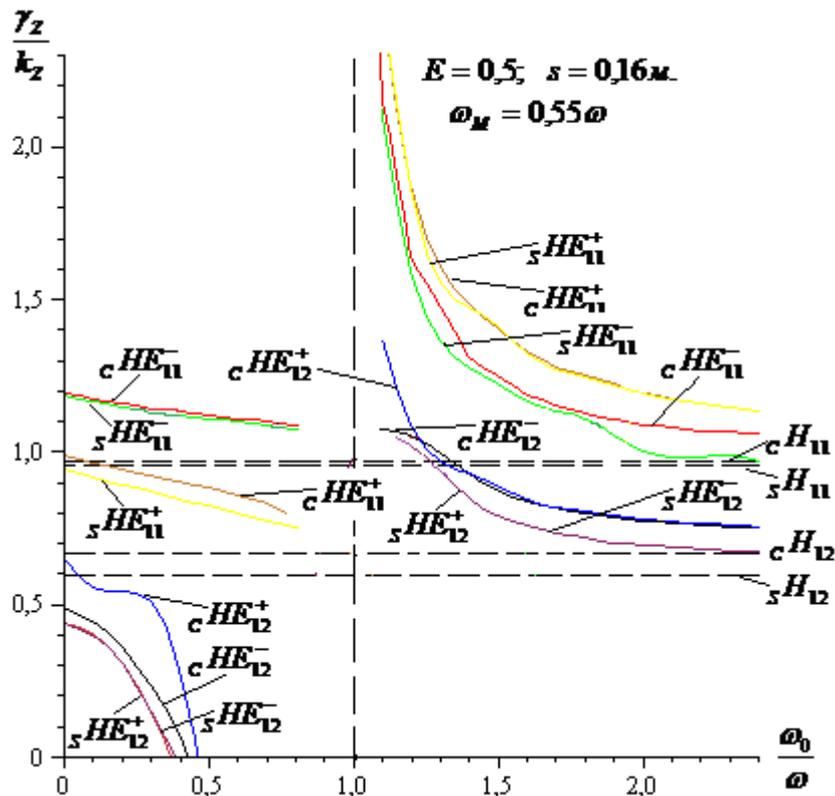


Рис.3. Зависимость постоянной распространения HE- волн от напряженности намагничивающего поля при  $E=0,5$  и  $\omega_m = 0,55\omega$

Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  $cH_{11}, sH_{11}, cH_{12}, sH_{12}$ .

Из полученных на рис. 1-4 результатов следуют, что появление мод зависит от величины намагниченности феррита  $\omega_m$ . На практике подбирают частоту  $\omega$  таким образом, чтобы при отсутствии намагничивающего поля существовало желаемое число мод. Достаточно часто выбирают такую частоту, чтобы в направляющей системе существовала только основная мода, которая существует при наименьшей частоте. Зафиксировав, частоту  $\omega$  изменяют в разумных пределах напряженность намагничивающего поля  $H_0$  по заранее определенному алгоритму. При определенной напряженности продольного внешнего постоянного намагничивающего магнитного поля  $H_0$  наступает ферромагнитный резонанс, заключающийся в резонансном поглощении ферритом (гиротропной средой) энергии электромагнитного поля.

Известно, что данное явление возникает при  $\omega=\omega_0$ . При очень больших значениях напряженности внешнего намагничивающего поля  $H_0$  постоянные распространения разных типов волн (мод) стремятся к постоянным распространения соответствующих типов волн для изотропного случая [6].

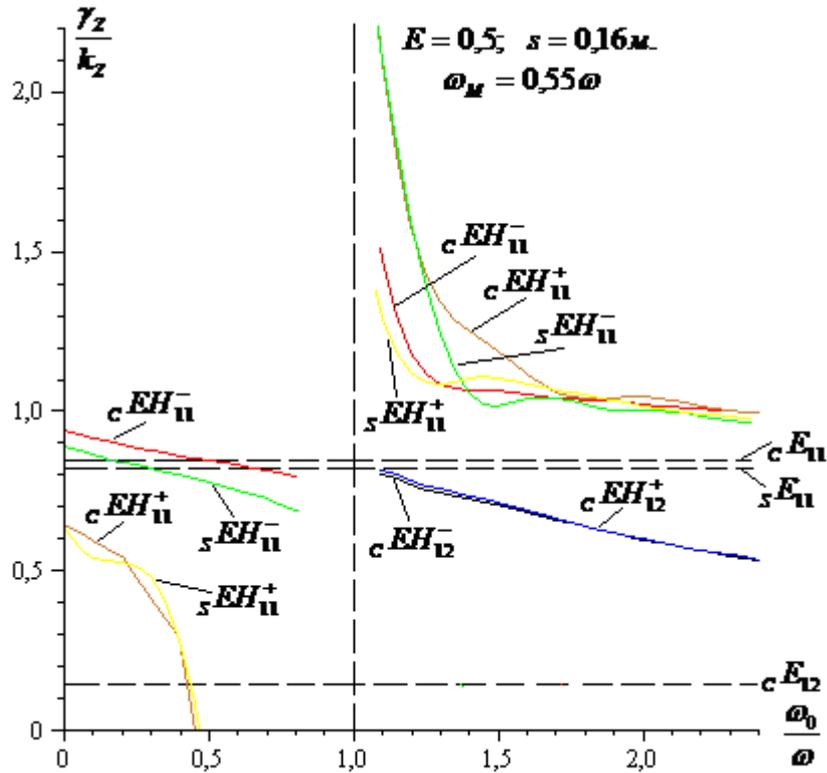


Рис.4. Зависимость постоянной распространения EH- волн от напряженности намагничивающего поля при  $E=0,5$  и  $\omega_m = 0,55\omega$

Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  $cE_{11}, sE_{11}, cE_{12}$ .

Анализ графиков на рис. 1-4 показывает, что с увеличением намагниченности феррита увеличивается разность фаз для мод с левым и правым вращением (например, для мод  $cHE_{11}^+$  и  $cHE_{11}^-$ ) при одном и том же значении намагниченности постоянного внешнего магнитного поля  $H_0$ . Особенно это заметно в области слабых внешних полей

$H_0$ , соответствующих условию  $\frac{\omega_0}{\omega} < 1$ , т.е. в области изменения частоты, предшествующей резонансу. Это является важным практическим преимуществом гиротропных эллиптических направляющих систем перед круглыми, так как при одних и тех же геометрических параметрах направляющей системы есть возможность получения более значительных фазовых набегов, следовательно, разработать более эффективные фазовращатели.

Для примера рассчитаем угол поворота плоскости поляризации на каждые 1 см для эллиптического волновода с длиной большой полуоси, равным 1,6 см и  $E_1=0,5$ . Характеристики феррита и ЭМВ следующие: частота ЭМВ  $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$  Гц, намагниченность феррита  $\frac{\omega_m}{\omega} = 0,15$ , относительная диэлектрическая проницаемость

феррита  $\epsilon_{omn} = 5$ , намагниченность внешнего постоянного магнитного поля  $\frac{\omega_0}{\omega} = 0,2$ .

Угол поворота плоскости поляризации вычислим по известной формуле (5). Так как обычно стремятся к одномодовому режиму, то рассмотрим моду  $cHE_{11}$ , используя, для всех случаев  $k_z = \omega\sqrt{\epsilon_0\epsilon_{omn}\mu_0} = 468,178\text{ м}^{-1}$ . Далее из данных графиков на рис. 1 и 2

получим угол поворота плоскости поляризации  $\phi_1 = 0,2667 \text{ рад.} = 15,29^0$  на каждые 1 см ( $Z=0,01\text{м}$ ) для эллиптического волновода с эксцентриситетом  $E=0,5$ .

Для этого же волновода при намагниченности феррита  $\frac{\omega_m}{\omega} = 0,55$ , используя, данные на графиках на рис. 3 и 4, получим угол поворота плоскости поляризации  $\phi_2 = 1,4396 \text{ рад} = 82,5^0$  на каждые 1 см ( $Z=0,01\text{м}$ ).

Из полученных результатов видно, что при увеличении намагниченности феррита  $\approx 3,7$  раза угол поворота плоскости поляризации увеличивается в  $\approx 5,4$  раза.

Основные выводы таковы:

- Получены решения дисперсионных уравнений (3) и (4) являющиеся решениями задачи Дирихле для уравнений Гельмгольца гибридных волн, распространяющихся в продольно-намагниченном гиротропном эллиптическом волноводе;
- Построены графики зависимостей постоянных распространения от напряженности постоянного намагничивающего продольного поля при постоянном эксцентриситете эллипса и различных намагниченностей феррита;
- Проведено сравнение фазовых набегов для продольно-намагниченного гиротропного эллиптического волновода и показано, что при увеличении намагниченности феррита  $\approx 3,7$  раз угол поворота плоскости поляризации увеличивается в  $\approx 5,4$  раза.

### Литература

1. Ширапов Д.Ш., Итигилов Г.Б. Обобщенные уравнения Гельмгольца гиротропных волнопроводов произвольной формы поперечного сечения // Материалы II Всероссийской научной конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн», г. Муром. 26 – 28 июня 2018 г. С. 209 – 219.
2. Ширапов Д.Ш., Итигилов Г.Б., Юмов И.Б., Анахин В.Д., Дамбаев Ж.Г. Задача Дирихле для уравнений Гельмгольца в гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании // Вестник Бурятского государственного университета: Математика, информатика. 2019. №3. С.17-31. DOI: 10.18101/2304-5728-2019-3-17-31
3. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложение функций Матье. Пер. с англ. В.А. Братановского // М.: Изд. иностранной литературы, 1953.- 475 с.
4. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров // М.:Изд. «Наука»,1967.- 780 с.
5. Лакс Б., Баттон К. Сверхвысокочастотные ферриты и ферритмагнетики. Перевод с английского // М.: Мир, 1965. – 676 с.
6. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах // Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 664 с.
7. Сул Г., Уокер Л. Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах. Перевод с английского // М.: Издательство иностранной литературы, 1955. – 192 с.
8. Итигилов Г.Б., Сажин В. И., Ширапов Д. Ш. Эффективный метод расчета критических длин волн собственных мод эллиптического волновода // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Научный журнал. №4 (24). 2009. Изд-во Иркутского государственного университета путей сообщения. С. 159-163.
9. Коптев А.А., Пасько А.А., Баранов А.А. Maple в инженерных расчетах // Изд-во Тамбовского государственного технического университета. 2003. – 80 с.
10. Ефимов И.Е., Шермина Г.А. Волноводные линии передачи. М.: Связь, 1979. – 232 с.