

**Особенности влияния ионосферы Земли на поле обыкновенной волны в окрестности каустики**

**Ю.И. Бова, А.С. Крюковский, Д.С. Лукин, Д.В. Растягаев**

*Автономная некоммерческая организация высшего образования Российский новый университет*

*E-mail: julia\_bova@mail.ru, kryukovsky@rambler.ru, luknet1@yandex.ru*

*Рассмотрена структура поля электромагнитной волны в окрестности каустики в случае распространения в магнитоактивной ионосферной плазме вблизи поверхности земли. Выполнено сопоставление равномерного (каустического) приближения и неравномерного (лучевого). Показано, что максимальное значение амплитуды поля в окрестности каустики можно оценить по геометрикооптическому (лучевому) приближению. Расчеты выполнены как с учётом, так и без учёта поглощения, а также с учётом расходимости радиосигнала в анизотропной плазме для модели ночной электронной концентрации и частоты соударений высокоширотной ионосферы. Предложена оценка поля на каустике на основе лучевого приближения.*

*The structure of the electromagnetic wave field in the vicinity of the caustic in the case of propagation in a magnetically active ionospheric plasma near the surface of the earth is considered. A comparison of the uniform (caustic) approximation and the non-uniform (ray) one is performed. It is shown that the maximum value of the field amplitude in the vicinity of the caustic can be estimated from the geometrical-optical (ray) approximation. The calculations were performed both taking into account and without taking into account absorption, as well as taking into account the divergence of the radio signal in an anisotropic plasma for the model of night electron concentration and collision frequency of the high-latitude ionosphere. An estimate of the field on the caustic based on the ray approximation is proposed.*

При исследовании распространения радиоволн дециметрового диапазона лучевыми методами возникает проблема описания полей на каустиках. Актуальность исследования каустических структур определяется их особой ролью по отношению к лучевым структурам, поскольку каустики, являющиеся огибающими лучевых семейств, разделяют физическое пространство на области с различным характером распространения [1,2]. Отметим также, что поле в окрестности каустики существенно возрастает.

В работе выполнено моделирование структуры волнового поля в окрестности каустики вблизи поверхности земли без учета радиоволн, отраженных от поверхности, но с учётом поглощения и расходимости радиосигнала в ионосферной анизотропной плазме.

Если пренебречь отклоняющим влиянием поглощения, что допустимо для ионосферной плазмы, то выражение для эффективной диэлектрической проницаемости имеет вид [3,4]:

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{2\nu(1-\nu)}{2(1-\nu) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-\nu)^2 \cos^2 \alpha}}. \quad (1)$$

В выражении (1) введены обозначения:

$$v = \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi e^2 N(\vec{r})}{m_e \omega^2} \quad (2)$$

– отношение квадрата плазменной частоты к квадрату рабочей частоты;

$$u = \left( \frac{\omega_H}{\omega} \right)^2 = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2} \quad (3)$$

– отношение квадрата гирочастоты к квадрату рабочей частоты.

В формулах (2) и (3)  $m_e$  – масса электрона,  $e$  – заряд электрона,  $c$  – скорость света  $H_0$  значение напряженности магнитного поля Земли, а функция  $N(\vec{r})$  – электронная концентрация в фиксированной точке пространства  $\vec{r}$ .

Помимо функций  $u$  и  $v$  в формулу (1) входит также угол  $\alpha$  между напряженностью магнитного поля Земли  $\vec{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, H_{0z})$ :

$$H_{0x} = H_0 \cos \gamma \cos \varphi, \quad H_{0y} = H_0 \cos \gamma \sin \varphi, \quad H_{0z} = H_0 \sin \gamma \quad (4)$$

и волновым вектором  $\vec{k}$ . Ориентация напряженности магнитного поля задается углами  $\gamma$  и  $\varphi$ . При вычислениях необходимо знать лишь  $\cos^2 \alpha$ :

$$\cos^2 \alpha = \frac{(H_{0x} k_x + H_{0y} k_y + H_{0z} k_z)^2}{H_0^2 |\vec{k}|^2}. \quad (5)$$

Знак «+» в формуле (1) соответствует обыкновенной волне, а знак «-» – необыкновенной волне.

Для построения лучевых траекторий нами метод бихарактеристической системы Гамильтона-Лукина (см., например, [5-7]):

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}}, \quad \frac{d\vec{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}. \quad (6)$$

В формулах (6)

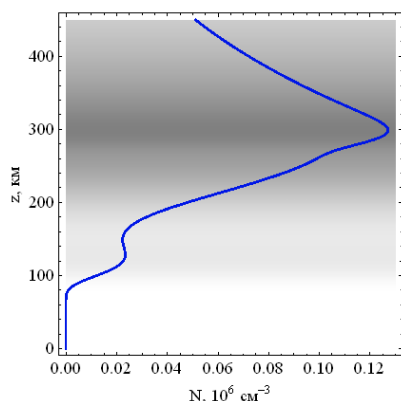
$$\Gamma = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r}, \vec{k}, \omega) \quad (7)$$

– гамильтониан,  $t$  – групповое время,  $\tau$  – параметр вдоль траектории [7,8].

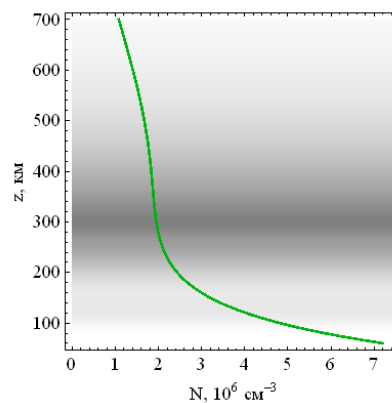
Для расчёта поля в окрестности каустики в работе использована модель высокоширотной ночной ионосферной плазмы, соответствующая марту месяцу,  $80^\circ$

с.ш. и  $30^\circ$  в.д., угол  $\gamma = -83^\circ$ , угол  $\varphi = 90^\circ$ ,  $H_0 = 0,551$  Э. На рис.1 показана зависимость электронной концентрации от высоты, а на рис. 2 приведена зависимость электронной частоты соударений  $\nu_e$  (см. [9]). Предполагается, что монохроматический сигнал излучается с рабочей частотой  $f=3,3$  МГц.

Будем считать, что источник излучения точечный и расположен на поверхности земли в начале координат. Излучение электромагнитной волны осуществляется в плоскости  $(x, z)$ .



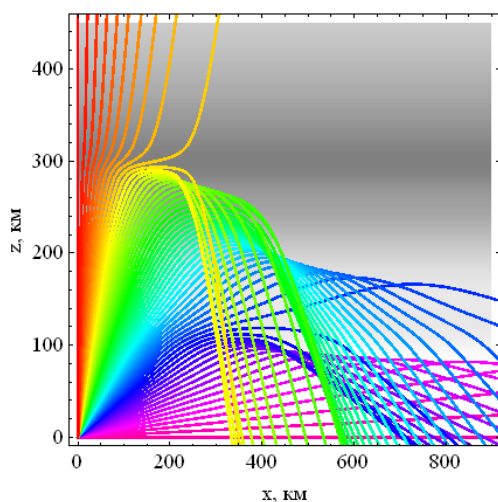
**Рис. 1.**



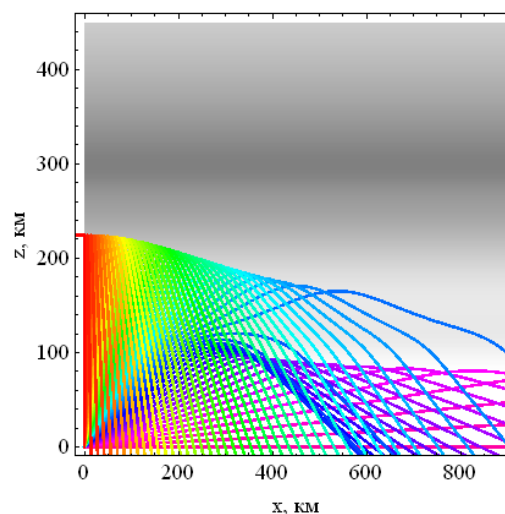
**Рис. 2**

**Зависимость электронной концентрации от высоты – рис.1, зависимость электронной частоты соударений от высоты – рис.2.**

На рис. 3 и 4 показана лучевая структура радиосигнала в плоскости  $(x,z)$  для обыкновенной волны и необыкновенной волны соответственно. Угол выхода лучей меняется от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . В виде фона, как и на рис. 1 и 2, показана электронная концентрация ионосферы. На высоте в районе 300 км хорошо виден максимум слоя  $F$ , а на высоте 115 км – максимум слоя  $E$ . Лучи, соответствующие распространению обыкновенной волны, с небольшим углом выхода отражаются от слоёв  $E$  и  $F$  и возвращаются на землю, а лучи с большими углами выхода просачиваются сквозь ионосферу.



**Рис. 3.**



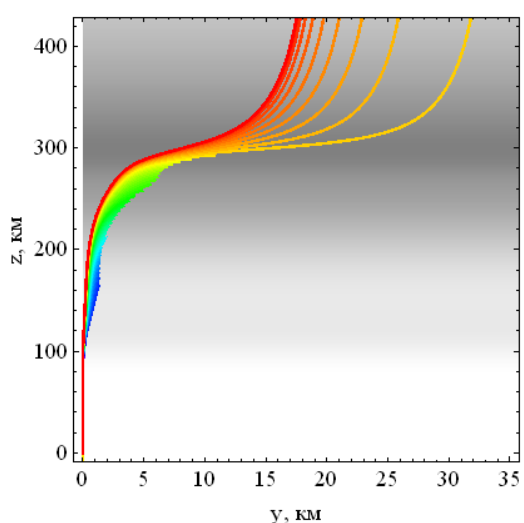
**Рис. 4**

**Лучевые структуры в плоскости  $(x,z)$ , рис.3 – обыкновенная волна, рис.4 – необыкновенная волна.**

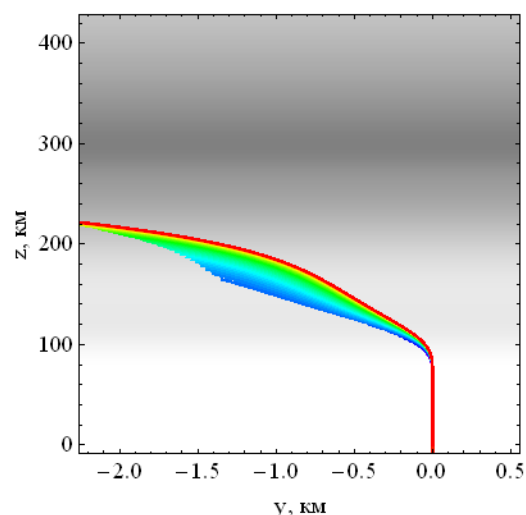
На рис. 3 видно, что семейство лучей образует сложную каустическую структуру, содержащую три каустических острия. В соответствии с классификацией волновых катастроф это особенность  $A_3$  [7,10]. Нижнее каустическое острие вызвано слоем  $E$ , а два верхних каустических острия определяются ионосферными слоями, образующими главный максимум.

В случае необыкновенной волны все лучи отражаются от ионосферы и возвращаются на землю. Часть лучей образует верхнюю каустическую структуру, а часть лучей с малыми углами выхода образуют каустическое острие, обусловленное слоем  $E$ .

На рис. 5 и 6 показана лучевая структура в боковой плоскости. Видно, что лучи выходят из первоначальной плоскости распространения  $(x, 0, z)$ , причем лучи, прошедшие ионосферный слой, в конечном итоге распространяются параллельно этой плоскости, а отражённые лучи при данной геометрии задачи возвращаются в плоскость первоначально распространения при выходе из ионосферы.



**Рис. 5.**



**Рис. 6.**

**Лучевые структуры в плоскости  $(y, z)$ , рис.5 – обыкновенная волна, рис.6 – необыкновенная волна.**

Если обратиться к рис.3, видно, что на землю опускаются три нижние ветви каустик, образующих особенности  $A_3$ , на расстояниях 333,755 км,  $\sim 575$  км и  $\sim 750$  км. В работе рассмотрена структура волнового поля в окрестности первой каустики (жёлтые лучи) без учета поверхностной волны, влияние которой при выбранной частоте передатчика на таком расстоянии от излучателя пренебрежимо мало. Согласно рис. 4 в этой области существует также поле необыкновенной волны, которое модулирует каустическое поле обыкновенной волны.

Пусть изотропный источник излучения создает на расстоянии  $r_0$  электрическое поле  $E_0$ . Тогда [11]:

$$E_0 = \frac{\sqrt{30W}}{r_0} \text{ (В/м)}. \quad (8)$$

В формуле (8)  $W$  – мощность излучения, а  $r_0$  расстояние до излучателя. В данной работе предполагалось, что  $W = 1$  кВт, а  $r_0 = 1$  м.

Поле обыкновенной волны правее каустики определяется как сумма вкладов двух лучей:

$$u_g^o \cong b_1^o \cdot \exp(i(\Phi_1^o - \pi/2)) + b_2^o \cdot \exp(i\Phi_2^o). \quad (9)$$

Первый луч уже коснулся каустики, а второй ещё нет. Лучевое поле необыкновенной волны в данной области однолучёвое:

$$u_g^x \cong b_1^x \cdot \exp(i(\Phi_1^x - \pi/2)). \quad (10)$$

Это луч уже коснулся верхней каустики.

В формулах (9)-(10) амплитудные коэффициенты  $b_j$  могут быть представлены как:

$$b_j = E_0 \exp[-\psi_j] \sqrt{\left| \frac{J_0}{J_j} \right|}. \quad (11)$$

В выражении (11)  $J_j$  это якобиан расходимости, вычисленный в точке наблюдения с помощью расширенной бихарактеристической системы Лукина [5, 9],  $J_0$  – значение якобиана расходимости, вычисленный на расстоянии  $r_0$  от источника,  $\psi_j$  поглощение, определяемое частотой соударения электронов, а  $\Phi_j$  это фаза, вычисленная, как и поглощение, вдоль лучевой траектории [9]. В наших обозначениях первый луч, это луч уже коснувшийся каустики.

Так как якобиан  $J_j$  на каустике равен нулю вследствие лучевой фокусировки, решение (11) обращается в бесконечность. Поэтому поле на каустике и в её окрестности определяется с помощью равномерной асимптотики через функцию Эйри и её производную (см., например, [7,12]):

$$u_c \cong \exp(i\theta) \left( l_1 \cdot Ai(\lambda) - il_2 \cdot \frac{dAi(\lambda)}{d\lambda} \right), \quad (12)$$

В выражении (12)  $Ai(\lambda)$

$$Ai(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(\xi^3 + \lambda \xi)) d\xi \quad (13)$$

это функция Эйри,  $\theta$  фаза бегущей волны, а  $\lambda$  – аргумент функции Эйри, которые в области света (где пересекаются два луча) определяются как:

$$\theta = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2), \quad \lambda = -\frac{3}{2^{4/3}} |\Phi_1 - \Phi_2|^{2/3}. \quad (14)$$

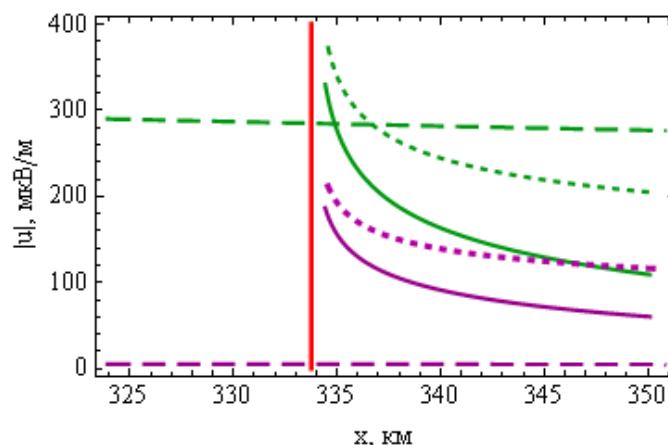
Коэффициенты асимптотического разложения (12)  $l_1$  и  $l_2$  в первом приближении имеют вид:

$$l_1 \cong \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (b_1 + b_2) \sqrt[4]{-3\lambda}, \quad l_2 \cong \frac{3}{2\sqrt{\pi}} (b_1 - b_2) \frac{1}{\sqrt[4]{-3\lambda}}. \quad (15)$$

Проблема определения поля на каустике и в её окрестности обусловлена необходимостью решения задачи «пристрелки», то есть вычисления с высокой точностью в одной точке фаз и амплитуд двух лучей, пришедших по разным, но близким траекториям. Для нижних ветвей каустики эта задача особенно трудоёмка, так как каустика и лучи в её окрестности идут квазипараллельно.

В настоящей работе был реализован другой алгоритм, близкий по своей сути к методу интерполяционной локальной асимптотике [13] и альтернативный локальному подходу [14]. Первоначально вычислялся угол выхода луча, образующего каустик. Зная этот угол, лучевое семейство в окрестности каустики разделялось на два подсемейства: подсемейство лучей, коснувшихся каустики и не коснувшихся. Относительно каждого луча определялась точка его пересечения с поверхностью земли и все необходимые лучевые параметры в этой точке. После этого для каждого лучевого подсемейства методом наименьших квадратов строились интерполяционные формулы для фаз и амплитудных коэффициентов, после чего в каждой точке находились параметры двух пересекающихся лучей и по формулам, приведенным выше, вычислялось лучевое и каустическое поля.

На рис. 7 показаны амплитуды лучей в окрестности каустики в лучевом приближении. Сплошной линией показаны амплитуды лучей обыкновенной волны ещё не коснувшейся каустики, а пунктиром – уже коснувшейся. Положение каустики отмечено вертикальной красной линией. Штриховой линией показаны амплитуды необыкновенной волны.

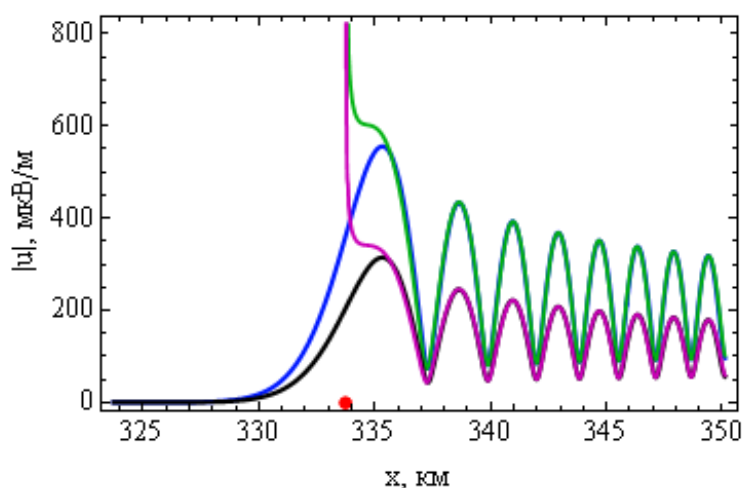


**Рис. 7.** Амплитуды лучей в окрестности каустики без учёта поглощения (зелёный цвет) и с учётом поглощения (фиолетовый цвет).

На рис. 8 приведена амплитуда поля обыкновенной волны в окрестности каустики. Чёрным и синим цветами показаны равномерные асимптотики, вычисленные по формулам с помощью функции Эйри и её производной (12)-(13). Чёрным цветом показаны расчёты, выполненные с учётом поглощения, а синей линией – без учёта поглощения. Красной точкой на горизонтальной оси показано положение каустики.

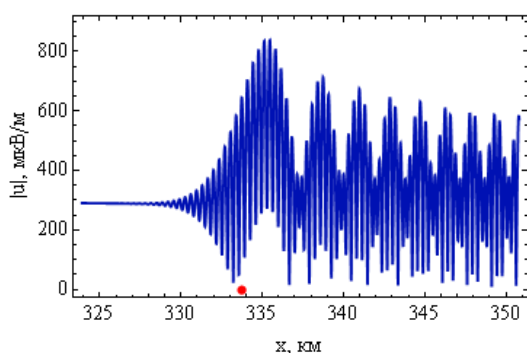
Максимальное значение, как и следует ожидать, смещено в область света относительно положения каустики. На каустике же амплитуда поля близка по значению к значениям амплитуды поля в области света.

На рисунке также показано сравнение амплитуды поля на каустике, вычисленной с помощью равномерной асимптотики, и лучевого приближения (9). Зелёным цветом приведено геометрикооптическое (ГО) приближение без учёта поглощения, а фиолетовым цветом – с учётом поглощения. Следует отметить, что ГО приближение в области света очень хорошо совпадает с равномерной асимптотикой вплоть до склонов главного максимума. Из рисунка следует, что для оценки максимального значения амплитуды поля в окрестности каустики с помощью лучевого приближения достаточно определить, где кривая образует точку перегиба, прежде чем уходит на бесконечность.



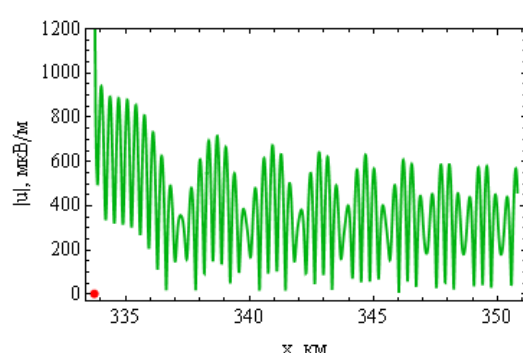
**Рис. 8.** Амплитуда модуля напряжённости электрического поля от расстояния вдоль горизонтально оси. Обыкновенная волна.

На рис. 9 и 10 приведены амплитуды поля обыкновенной волны с учётом вклада необыкновенной волны в окрестности каустики в каустическом (рис. 9) и ГО (рис. 10) приближениях, но без учёта поглощения.



**Рис. 9.**

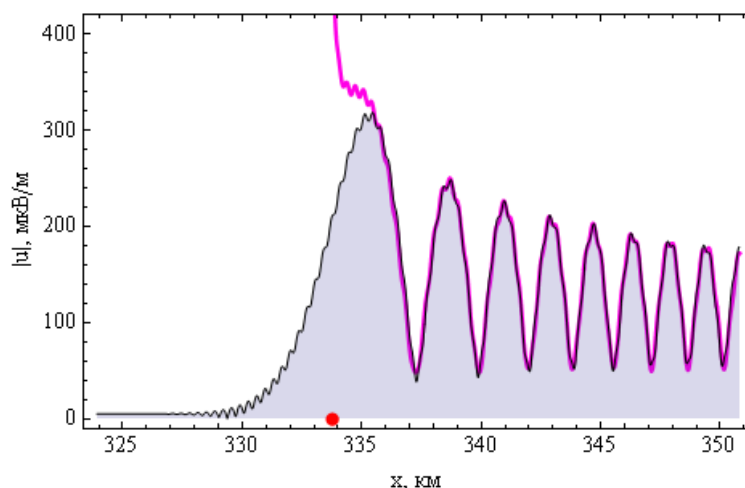
Амплитуда модуля напряжённости электрического поля от расстояния вдоль горизонтально оси без учёта поглощения, но с учётом вклада необыкновенной волны. Равномерная асимптотика – рис. 9, ГО приближение – рис.10.



**Рис.10.**

Видно, что необыкновенная волна вносит существенный вклад и сильно модулирует каустическую структуру необыкновенной волны.

На рис. 11 показана амплитуда модуля напряжённости электрического поля обыкновенной и необыкновенной волны в зависимости от расстояния вдоль горизонтально оси  $x$  с учётом поглощения. Видно, что в данном случае необыкновенная волна слабо модулирует обыкновенную, вызывая лишь небольшие мелкие осцилляции.



**Рис. 11.** Амплитуда модуля напряжённости электрического поля от расстояния вдоль горизонтально оси. Обыкновенная и необыкновенная волна. Сопоставление равномерной асимптотики и ГО приближения.

На рис.11 также проведено сравнение равномерной асимптотики (чёрный цвет) и ГО приближения (фиолетовый цвет). Результаты сопоставления подтверждают сделанные выше выводы.

Из рис. 11 видно, что осцилляции амплитуды поля имеют период  $1,5 \div 3$  км с тенденцией к уменьшению при удалении от каустики.

Таким образом, в работе рассмотрена структура поля электромагнитной волны в окрестности каустики в случае распространения в анизотропной ионосферной плазме. Выполнено сопоставление равномерного (каустического) приближения и неравномерного (лучевого). Показано, что максимальное значение амплитуды поля в окрестности каустики можно оценить по ГО (лучевому) приближению, не прибегая к равномерным асимптотикам, определив положение точки перегиба на графике амплитуды лучевого решения, непосредственно перед переходом к неограниченному росту.

*Работа выполнена при поддержке РФФ (грант № 20-12-00299).*

### Литература

1. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Методы моделирования распространения электромагнитных волн в ионосфере с учетом распределений электронной концентрации и магнитного поля Земли // Радиотехника и электроника. 2014. Т. 59. № 12. С. 1180-1187.
2. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Теория расчета эталонных фокальных и дифракционных электромагнитных полей на основе специальных функций волновых катастроф. // Радиотехника и электроника, 2003. Т.48. №8. С. 912-921.
3. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1960. 552 с.
4. Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. М.: Мир. 1973. 502 с.



5. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме. // Радиотехника и электроника, М.: Наука. 2012. Т.57. № 9. С. 1028-1034.
6. Кирьянова К.С., Крюковский А.С. Особенности лучевого распространения радиоволн в ионосфере Земли // Т-Сотт: Телекоммуникации и транспорт. 2012. № 11. – С. 25–28.
7. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.
8. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Растягаев Д. В., Скворцова Ю. И. Математическое моделирование распространения частотно-модулированных радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника, 2015, Т. 60, № 10. С. 1001-1009.
9. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Распространение частотно-модулированного излучения электромагнитных волн в ионосфере Земли с учетом поглощения и внешнего магнитного поля // Радиотехника и электроника. 2019. Т. 64. № 1. С. 3–14.
10. Крюковский А.С., Лукин Д.С. К вопросу о поле в окрестности каустического острия в ионосферном плазменном слое // Радиотехника и электроника, 1981. Т. 26. № 6. С. 1121–1126.
11. Поляков В.Т. Волновая теория методов дистанционного зондирования. М.: МИИГАиК, 1981. 88 с.
12. Кравцов Ю.А. Об одной модификации метода геометрической оптики. // Изв. ВУЗов (Радиофизика). 1964. Т. 7. № 4. С. 664–673.
13. Карепов С.Л., Крюковский А.С. Расчет волнового поля методом интерполяционной локальной асимптотики. //Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 1. С. 40 - 46.
14. Крюковский А.С. Локальные равномерные асимптотики волновых полей в окрестности основных и краевых каспидных каустик. // Радиотехника и электроника. 1996. Т.41. № 1. С. 59-65.