Особенности применения символьных вычислений для построения локальной асимптотики волновых полей методами теории катастроф

А.С. Крюковский, Ю.И. Бова

Автономная некоммерческая организация высшего образования Российский новый университет , E-mail: kryukovsky56@yandex.ru
Автономная некоммерческая организация высшего образования Российский новый университет , E-mail: julia_bova@mail.ru

На основе символьных вычислений развит метод локальной асимптотики, описывающий дифракционные фокусировки электромагнитных полей в случае, когда семейство первичных (геометрооптических) и вторичных (краевых) лучей образуют фокусировки каспоидного типа $\mathbf{A_2}$ *(волновая нульмодальная катастрофа* $\mathbf{F_4}$*). Выполнено математическое моделирование коэффициентов универсальной деформации и фазы бегущей волны. Получены явные выражения для параметров универсальной деформации.*

Base on symbol calculation a local asymptotic method is developed that describes the diffraction focusing of electromagnetic fields in the case when a family of primary (geometrooptical) and secondary (edge) rays form a focusing of the cuspoid type $\mathbf{A_2}$ *(wave catastrophe* $\mathbf{F_4}$*). Mathematical modeling of the unfolding coefficients and the traveling wave phase was performed. Explicit expressions for the parameters of unfolding are obtained.*

При решении задач электродинамики и распространения радиоволн в неоднородных средах асимптотическими методами возникают структурно-устойчивые особенности, соответствующие волновым катастрофам различных типов. Равномерные асимптотики полей в окрестности таких особенностей в фокальных и дифракционных областях описываются в виде эталонных структур, содержащих специальные функции волновых катастроф [1-6].

Важной проблемой является определение связи параметров физической задачи с параметрами эталонных структур, соответствующих катастрофам того или иного типа, то есть нахождение коэффициентов универсальной деформации. В задачах дифракции и распространении радиоимпульсов актуальным является привлечение теории краевых волновых катастроф, позволяющих учесть наряду с первичными, вторичные лучевые семейства как единую геометрооптическую структуру.

Определение коэффициентов универсальной деформации (коэффициентов «подобия») является сложной математической задачей. Однако в последнее время её явное решение становится доступным благодаря применению символьных вычислений и компьютерной математике.

В работах [10-12] задача была рассмотрена нами на примере унимодальной краевой катастрофы $\mathbf{K_{4,2}}$. В [4,13] рассмотрена каустическая структура этой особенности. В настоящей работе изложен способ построения коэффициентов «подобия» на примере топологической особенности $\mathbf{F_{4,2}}$ (простой нульмодальной катастрофы $\mathbf{F_{4,2}}$), структурно-устойчивой в трёхмерном пространстве и позволяющей описывать совместную каспоидную фокусировку типа $\mathbf{A_2}$ как семейства первичных геометрооптических (ГО) лучей, так и семейства вторичных краевых лучей [2,7-9].

Выражение для универсальной деформации краевой катастрофы Σ= $\mathbf{F_4}$ имеет вид:

$$F_{\Sigma} = \nu_2 \xi_2^2 + \nu_1 \xi_1^3 + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \lambda_3 \xi_1 \xi_2 , \qquad (1)$$

где $\nu_1=\pm1$, $\nu_2=\pm1$, а λ_j – коэффициенты универсальной деформации.

Рассмотрим фазовую функцию $\Phi(\eta_1,\eta_2,\vec{\alpha})$ в окрестности особой точки с координатами $(\vec{\alpha}_o)$, в которой универсальная деформация переходит в нормальную форму и имеет вид

$$F_\Sigma = \nu_2\xi_2^2 + \nu_1\xi_1^3. \tag{2}$$

Справедливо тождество (см., например, [1,2,7]):

$$\Lambda\Phi = F_\Sigma + \theta, \tag{3}$$

в котором Λ – большой параметр задачи (Λ>>1, как аргумент не рассматривается), а $\theta(\vec{\alpha})$ – фаза бегущей волны. Для упрощения вычислений введем функцию $\mu = \Lambda\Phi$. Тогда основное тождество приобретает вид:

$$C \equiv \mu(\eta_1(\vec{\alpha}),\eta_2(\vec{\alpha}),\vec{\alpha}) - F_\Sigma(\xi_1,\xi_2,a(\vec{\alpha}),\vec{\lambda}(\vec{\alpha})) - \theta(\vec{\alpha}) = 0. \tag{4}$$

Между внутренними переменными фазовой функции и внутренними переменными универсальной деформации существует взаимнооднозначное отображение [1,2,7]:

$$\begin{cases} \eta_1 = g_1(\xi_1,\xi_2,\vec{\alpha}) \\ \eta_2 = \eta_{o2} + \xi_2\, g_2(\xi_1,\xi_2,\vec{\alpha}) \end{cases}. \tag{5}$$

Для определения коэффициентов $\lambda_j(\vec{\alpha})$ и фазы бегущей волны $\theta(\vec{\alpha})$ используем разработанный нами метод локальной асимптотики [2, 10-12, 14-18].

Найдем методом локальной асимптотики выражения для коэффициентов $\lambda_j(\vec{\alpha})$ и фазы $\theta(\vec{\alpha})$.

Введем обозначения:

$$\mu_i = \left.\frac{\partial\mu}{\partial\eta_i}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\ \mu_{ik} = \left.\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta_i\partial\eta_k}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\ \mu_{ijk} = \left.\frac{\partial^3\mu}{\partial\eta_i\partial\eta_j\partial\eta_k}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\dots$$

$$p_j^i = \left.\frac{\partial\eta_i}{\partial\xi_j}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\ p_{jk}^i = \left.\frac{\partial^2\eta_i}{\partial\xi_{jk}}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\ p_{jkl}^i = \left.\frac{\partial^3\eta_i}{\partial\xi_j\partial\xi_k\partial\xi_l}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\dots(i,j,k,l=1,2). \tag{6}$$

В более сложных случаях мы будем использовать обозначения:

$$\mu_{(n,m)} = \left.\frac{\partial^{n+m}\mu}{\partial\eta_1^n\partial\eta_2^m}\right|_{(\vec{\alpha}_o)},\ C_{(n,m)} = \left.\frac{\partial^{n+m}C}{\partial\eta_1^n\partial\eta_2^m}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}\ \ p_{(n,m)}^i = \left.\frac{\partial^{n+m}\eta_i}{\partial\xi_1^n\partial\xi_2^m}\right|_{(\vec{\alpha}_o)}. \tag{7}$$

В особой точке $(\vec{\alpha}_o)$ (см. [2])

$$\xi_1 = \xi_2 = 0,\ \vec{\eta} = \vec{\eta}_o\,. \tag{8}$$

Кроме того, при $\eta_2 = \eta_{o2}$ внутренняя переменная $\xi_2 = 0$ (см. (5)) (см. [2,7,8]), и тождество (4) переходит в тождество сужения:

$$\Omega \equiv \mu(\eta_1(\vec{\alpha}),\eta_{o2},\vec{\alpha}) - \nu_1\xi_1^3 - \lambda_1(\vec{\alpha})\xi_1 - \theta(\vec{\alpha}) = 0\,. \tag{9}$$

Это тождество соответствует особенности **A2** – «каустика» для краевых лучей. В работах [2,16,18] показано, что в особой точке типа **A2**

$$\mu_1 = \mu_{11} = 0,\ \mu_{111} \neq 0\,. \tag{10}$$

Учитывая (10), нетрудно установить, что для того чтобы получить p_1^1, необходимо продифференцировать тождество (9) в особой точке три раза по ξ_1, для определения p_{11}^1 – четыре раза и так далее.

Выполняя вычисления, находим (см. также [2, 14, 18]):

$$d \equiv p_1^1 = \sqrt[3]{\frac{6}{|\mu_{111}|}}\,,\ p_{11}^1 = -\frac{1}{6}\frac{\mu_{(4,0)}}{\mu_{(3,0)}}d^2\,,\ p_{111}^1 = \left(\frac{1}{8}\frac{\mu_{(4,0)}^2}{\mu_{(3,0)}^2} - \frac{1}{10}\frac{\mu_{(5,0)}}{\mu_{(3,0)}}\right)d^3,$$

$$\nu_1 = \operatorname{sign}\,\mu_{111}\,,\ p_{1111}^1 = \left(\frac{7}{30}\frac{\mu_{(4,0)}\mu_{(5,0)}}{\mu_{(3,0)}^2} - \frac{35}{216}\frac{\mu_{(4,0)}^3}{\mu_{(3,0)}^3} - \frac{1}{15}\frac{\mu_{(6,0)}}{\mu_{(3,0)}}\right)d^4, \tag{11}$$

Таким образом, формулы (11) получаются последовательно из анализа производных $C_{(n,0)}$ или $\Omega_{(n,0)}$ при n=3,4,5,6, вычисленных в особой точке.

В дальнейшем для получения первого приближения нам потребуются $p_\alpha^1 = \dfrac{\partial\eta_1}{\partial\alpha_j}$ и $p_{1\alpha}^1 = \dfrac{\partial^2\eta_1}{\partial\xi_1\partial\alpha_j}$. Величина p_α^1 находится из анализа $\Omega_{(2,\alpha)}$ в особой точке и имеет вид:

$$p_\alpha^1 = -\frac{\mu'_{\alpha(2,0)}}{\mu_{(3,0)}} + \frac{1}{6}\frac{\mu_{(4,0)}\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(3,0)}^2}\,. \tag{12}$$

Величина $p_{1\alpha}^1$ находится из анализа $\Omega_{(3,\alpha)}$ в особой точке:

$$p^1_{1\alpha} = -\frac{p^1_1}{3\mu_{(3,0)}}\left(\mu'_{\alpha(3,0)} - \frac{\mu_{(4,0)}\mu'_{\alpha(2,0)}}{\mu_{(3,0)}} + \frac{5}{24}\frac{\mu^2_{(4,0)}\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu^2_{(3,0)}} - \frac{1}{10}\frac{\mu_{(5,0)}\mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(3,0)}}\right). \quad (13)$$

Будем искать приближённые выражения для $\lambda_j(\vec{\alpha})$ и $\theta(\vec{\alpha})$ в виде:

$$\lambda_j(\vec{\alpha}) \cong \sum_{k=1}^{M} \lambda_{j\alpha_k} \Delta\alpha_k ,$$

$$\theta(\vec{\alpha}) \cong \theta_o + \sum_{k=1}^{M} \theta_{\alpha_k} \Delta\alpha_k + \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \theta_{\alpha_k\alpha_j} \Delta\alpha_k \Delta\alpha_j , \quad (14)$$

где $\Delta\alpha_k = \alpha_k - \alpha_{ok}$, а M – это размерность конфигурационного пространства. В дальнейшем для сокращения записи индекс k у α_k будем опускать, как это сделано в выражениях (12) и (13).

Определим коэффициенты, входящие в (14). Для того чтобы найти $\lambda_{1\alpha}$ продифференцируем сужение (9) один раз по ξ_1, один раз по α (то есть вычислим $\Omega_{(1,0)\alpha}$) и положим:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_o, \quad \xi_1 = 0. \quad (15)$$

Тогда находим, что:

$$\lambda_{1\alpha} = \mu_{1\alpha}\, p^1_1. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь определение с точностью до членов второго порядка включительно фазы бегущей волны $\theta(\vec{\alpha})$.

Величина $\theta(\vec{\alpha}_o)$ легко находится из тождества (9):

$$\theta_o \equiv \theta(\vec{\alpha}_o) = \mu(\eta_1(0,\vec{\alpha}_o), \eta_{o2}, \vec{\alpha}_o), \quad (17)$$

где $\eta_1(0,\vec{\alpha}_o) = \eta_{o1}$ – значение первого внутреннего параметра задачи в особой точке.

Для определения θ_α продифференцируем тождество (9), один раз по α ($\Omega_{(0,0)\alpha}$) и учтём (15). Тогда:

$$\theta_\alpha = \mu_\alpha \; . \quad (18)$$

Для вычисления коэффициентов $\theta_{\alpha\beta}$, $\alpha=\alpha_k$, $\beta=\beta_j$ продифференцируем тождество (9) ещё и по β. Анализируя $\Omega_{(0,0)\alpha\beta}$ в особой точке, находим:

$$\theta_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} + \mu_{1\alpha} p^1_\beta + \mu_{1\beta} p^1_\alpha . \qquad (19)$$

Все величины, входящие в (19), известны (см. (12)).

Таким образом, сужение позволило нам определить линейное приближение для λ_1 и θ . Для нахождения λ_2 и λ_3 необходимо рассмотреть полное выражение для универсальной деформации (1) особенности Σ= **F4**.

Здесь следует отметить, что, во-первых, все производные η_2 по ξ_1 и α равны нулю:

$$p^2_{(n,0)} = 0, \quad p^2_{(n,0)\alpha} = 0, \qquad (20)$$

что явно следует из (5), а во-вторых, в особой точке

$$\mu_{12} = 0, \qquad (21)$$

что вытекает из равенства нулю в особой точке $C_{(1,1)}$.

Найдем линейное приближение для коэффициента λ_2 . Для этого продифференцируем тождество (4) один раз по ξ_2, один раз по α (то есть, вычислим $C_{(0,1)\alpha}$) и учтём (15), (20), (21). Тогда:

$$\lambda_{2\alpha} = \mu_{1\alpha}\, p^1_2 + \mu_{2\alpha}\, p^2_2 . \qquad (22)$$

Для вычисления p^2_2 продифференцируем дважды по ξ_2 тождество (4) в особой точке, то есть, вычислим $C_{(0,2)}$ и получим, что

$$p^2_2 = \sqrt{\frac{2}{|\mu_{22}|}}, \; \nu_2 = \operatorname{sign}\, \mu_{22} . \qquad (23)$$

Сложнее определяется производная p^1_2 . Для этого вычислим в особой точке производные тождества (4) $C_{(2,1)}$, приравняем нулю и найдём:

$$p^1_2 = -\frac{p^2_2}{\mu_{111}} \mu_{112} . \qquad (24)$$

Из формул (24) следует, что особенность **F4** формируется при условии:

$$\mu_{111} \neq 0 . \qquad (25)$$

Перейдем теперь к определению линейного приближения для коэффициента λ_3. Продифференцируем тождество (4) по ξ_1, по ξ_2 и по α. Тогда найдём:

$$\lambda_{3\alpha} = \left(\mu_{111} p_\alpha^1 p_2^1 + \mu_{112} p_\alpha^1 p_2^2 + \mu_{11\alpha} p_2^1 + \mu_{12\alpha} p_2^2\right) p_1^1 + \mu_{1\alpha} p_{12}^1 + \mu_{2\alpha} p_{12}^2 \quad (26)$$

В формуле (26) нам известны уже все выражения кроме p_{12}^1 и p_{12}^2 . Для определения p_{12}^2 вычислим тождество $C_{(1,2)}$ и приравняем его к нулю:

$$p_{12}^2 = \frac{p_2^2 p_1^1}{2\mu_{111}\mu_{22}}\left(\mu_{112}^2 - \mu_{111}\mu_{122}\right). \quad (27)$$

Для определения производной p_{12}^1 вычислим в особой точке производные тождество $C_{(3,1)}$ и приравняем к нулю. Тогда p_{12}^1 :

$$p_{12}^1 = -\frac{p_2^2 p_1^1}{6\mu_{111}^2\mu_{22}}\left(3\mu_{112}^3 - 3\mu_{111}\mu_{112}\mu_{122} + 2\mu_{111}\mu_{1112}\mu_{22} - 2\mu_{1111}\mu_{112}\mu_{22}\right) (28)$$

Таким образом, в работе методом символьных вычислений получены формулы, позволяющие рассчитывать в первом приближении параметры универсальной деформации краевой волновой катастрофы типа $\mathbf{F_4}$, являющей единой структурно-устойчивой дифракционной фокусировкой как краевых лучей, образующих каустику $\mathbf{A_2}$, так и геометрооптических лучей, образующих каустику $\mathbf{A_2}$ с краем. Коэффициенты, образующие вектор $\vec{\lambda}(\vec{\alpha})$, вычислены в линейном приближении, фаза бегущей волны $\theta(\vec{\alpha})$ найдена во втором квадратичном приближении.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-02-00544-а).

Литература

1. Kryukovskii A.S., Rastyagaev D.V., Lukin D.S. Construction of uniform asymptotic solutions of wave-type differential equations by methods of catastrophe theory // Russian Journal of Mathematical Physics. 2009. V. 16. № 2. P. 251-264.
2. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013. 368 с.
3. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта // Распространение и дифракция электромагнитных волн М.: МФТИ, 1993. С. 20-37.
4. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Информационная система "Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике" // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12. № 8. С. 71-74.
5. Крюковский А.С., Лукин Д.С. К вопросу о поле в окрестности каустического острия в ионосферном плазменном слое // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26. № 6. С. 1121-1126.
6. Balykina A.M., Kryukovskii A.S. Investigation of the electromagnetic field of caustic-cusp and butterfly edge waves in the shadow region // Journal of Communications Technology and Electronics. 2010. T. 55. № 5. C. 497-504.
7. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А. Применение теории краевых катастроф

для построения равномерных асимптотик быстроосциллирующих интегралов // Дифракция и распространение волн. Междувед. сборник / МФТИ. М., 1985. С. 4 - 21.
8. Kryukovsky A. S., Lukin D. S., Palkin E. A. Uniform asymptotics for evaluating oscillatory edge integrals by methods of catastrophe theory // Soviet journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1987. V. 2. № 4. P. 219 - 312.
9. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. Т. 18. № 8. С. 18-23.
10. Bova Yu.I., Kryukovsky A.S., Mikhaleva E.V. The Method of Local Asymptotic for Determining The Parameters of an Edge Catastrophe Describing The Joint Focusing of Geometric-Optical and Diffraction Waves //2019 Russian Open Conference on Radio Wave Propagation (RWP), 1-6 July 2019; / Russia, Kazan: IEEE. PP. 496 – 499.
11. Крюковский А.С., Бова Ю.И. Математическое моделирование параметров универсальной деформации краевой катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$ методом локальной асимптотики // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2019. № 1. С. 11-18.
12. Kryukovsky A.S., Bova Yu.Ig. Investigation of Catastrophe Parameters, Describing Structurally-Stable Focusings of Primary and Secondary Edge Waves by Local Asymptotic Method // 2019 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. Moscow, Russia, 20-21 March 2019. / M.: IEEE, 2019, PP. 1 – 4.
13. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Каустическая структура краевой катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$. // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление» / М.: РосНОУ, 2015. Выпуск 2(10). – С. 5–9.
14. Kryukovskii A.S. Local uniform asymptotics of wave fields in the vicinity of basic and boundary cuspoidal caustics // Journal of Communications Technology and Electronics. 1996. Т. 41. № 1. С. 51-57.
15. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальное асимптотическое описание электромагнитного поля в окрестности каустического острия в плоско – слоистой среде // Вопросы дифракции электромагнитных волн. М., изд. МФТИ, 1982. С. 40-45.
16. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспоидных катастроф // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах М.: МФТИ, 1989. С. 56-60.
17. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальные асимптотики волновых полей в фокальных областях типа катастроф коранга один и два // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2018. № 1. С. 5-17.
18. Крюковский А.С. Локальное определение коэффициентов универсальной деформации катастрофы $\mathbf{A}_3$. // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2018. № 2. С. 5-10.