Применение полиномиальных функций в цифровой обработке сигналов

С.Н. Жиганов, К.В. Михеев, Е.А. Жиганова

Муромский институт (филиал) ФГБОУВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
602264, г. Муром, Владимирской обл., ул. Орловская, 23
E-mail: s_zh_72@mail.ru

В работе получены коэффициенты полиномиальной функции до 9 степени, использующие многочлены Чебышева первого и второго рода, многочлены Лежандра, Гегенбауэра и Якоби для аппроксимации функции вычисления квадратного корня. Рассчитаны значения максимальных отклонений аппроксимирующей функции от аппроксимируемой на интервале значений, а также значения площади ошибок.
In this paper, we obtain coefficients of a polynomial function up to degree 9 that use Chebyshev polynomials of the first and second kind, Legendre, Gegenbauer, and Jacobi polynomials to approximate the square root calculation function. The values of the maximum deviations of the approximating function from the one approximated in the range of values, as well as the values of the error area, are calculated.

Введение

Современные цифровые процессоры реализуют на аппаратном уровне только простые арифметические и логические операции, и для вычисления более сложных функций, таких как $\sin x$, $\log x$, $\sqrt{x}$ и т.д., используются различные методы и вычислительные алгоритмы аппроксимации [1-5]. Повсеместное распространение полиномиального метода обусловлено его простотой, наглядной геометрической интерпретацией, а главное – низкими вычислительными затратами при расчете значений функции $f(x)$ с использованием схемы Горнера

$$\varphi_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \Big(\big((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2}\big)x + \ldots + a_1\Big) + a_0. \quad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – некоторые константы.

Существуют различные методы поиска коэффициентов полинома (1) – это классический подход, основанный на разложении функции в ряд Тейлора (анализ точности аппроксимации функций применительно к ЦОС можно найти в [2]), ставший распространенным метод аппроксимации, основанный на применении полиномов Чебышева, особенно полиномов наилучшего приближения Чебышева, когда все $n + 2$ экстремальных значения погрешностей δ_i, $i \in 0,1,\ldots,n+1$ на интервале аппроксимации $x \in [a,b]$ поочередно меняют знак и равны между собой по абсолютной величине [2], и другие малоизвестные и мало применяемые на практике полиномы [6].

Целью данной работы является сравнительный анализ точности аппроксимации функциональных зависимостей при использовании ряда полиномов степени n на примере функции вычисления квадратного корня на интервале значений от 0 до 1.

Разложение функций по ортогональным многочленам

В работе [6] показано, что для ортогональных многочленов $f_k(x)$ на отрезке $[a; b]$ с весовой функцией $\omega(x)$ при $m \neq n$ должно выполнятся следующее условие

$$\int_a^b f_m(x)f_n(x)\ \omega(x)dx = 0. \qquad (2)$$

Из соотношения (2) видно, что можно придумать большое количество ортогональных функций при соответствующем подборе весовых функций $\omega(x)$. В работе [6] приведены ортогональные многочлены на интервале [–1; 1] и соответствующих им весовые функций $\omega(x)$. В таблице 1 показаны эти многочлены.

Таблица 1. Ортогональные многочлены

Название многочлена	Весовая функция $\omega(x)$
Чебышева I рода	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Чебышева II рода	$\sqrt{1-x^2}$
Лежандра	1
Гегенбауэра	$(1-x^2)^{\lambda-1/2}$
Якоби	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$

Из таблицы 1 видно, что из весовой функции $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, соответствующей многочленам Якоби, получаются остальные перечисленные в таблице ортогональные многочлены при определенных значениях α и β. Так многочлены Гегенбауэра являются частным случаем многочлена Якоби при $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, многочлены Лежандра получаются из многочлена Якоби при $\alpha = \beta = 0$, многочлены Чебышева первого рода при $\alpha = \beta = -1/4$, а второго рода при $\alpha = \beta = 1/4$. Рассмотрим применение этих полиномов при аппроксимации функции $f(x) = \sqrt{x}$.

В работе получены значения коэффициентов полиномов, приведенных в таблице 1 до 9 степени для двух критериев – минимизации максимального значения ошибки аппроксимации и минимизации площади под кривой ошибок. В работе получены кривые полиномиальных функций для всех рассматриваемых полиномиальных функций. Рассчитаны ошибки аппроксимации для соответствующих полиномов при аппроксимации функциональной зависимости квадратного корня на интервале от 0 до 1.

Выводы

Полученные результаты позволили сделать следующие выводы:

1. Полиномиальные методы аппроксимации позволяют получить практически любую точность представления функции, заданной аналитически на определенном интервале значений;

2. Многочлены Якоби обладают максимальным числом степеней свободы при выборе коэффициентов полинома, поскольку зависят от двух параметров α и β, причем, как показали результаты расчетов случай, когда $\alpha < \beta$ более предпочтителен для расчетов коэффициентов полинома, поскольку различие между параметрами не столь сильно влияет на точность аппроксимации, однако при использовании этих многочленов возникает необходимость в нормировке коэффициентов полинома и кроме того аналитические расчеты интегралов для более сложных функций наталкиваются на серьезные сложности, что приводит к использованию численных методов решения, привнося дополнительные погрешности;

3. Наилучшие результаты аппроксимации показали полиномы Гегенбауэра, которые получаются из полиномов Якоби при $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, при этом максимальная точность аппроксимации получается при $\lambda \in [1{,}5; 2]$, однако многочлены Гегенбауэра зависят только от одного параметра, что ограничивает общее количество их возможных вариантов и, как в случае многочленов Якоби, появляются те же самые сложности при расчетах коэффициентов полиномом;

4. Полиномы Чебышева первого и второго рода могут обеспечить достаточно высокие показатели эффективности, причем точность аппроксимации полиномов Чебышева второго рода выше чем первого, однако эти полиномы получаются только для двух конкретных весовых функций и других значений полиномов не существует, кроме того в ряде случает, так же приходится использовать численные методы для расчета коэффициентов полиномов;

5. Самыми простыми для расчета коэффициентов, но обладающие наихудшими точностными характеристиками обладают многочлены Лежандра, точность аппроксимации при помощи этих полиномов несколько выше чем при разложении в ряд Тейлора, но хуже, чем у всех рассмотренных полиномов;

6. Все рассмотренные подходы к получению полиномиальных функций обладают общим недостатком – они не соответствуют полиному наилучшего приближения, когда максимальные отклонения от истинного значения одинаковы на всем интервале аппроксимации функции.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-07-01215 и конкурса инновационных проектов Владимирской области «УМНИК-2018».

Литература

1. Байков В.Д., Смолов В.Б. Аппаратурная реализация элементарных функций в ЦВМ. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. – 96 с.
2. Chekushkin V.V., Zhiganov S.N. Computational methods in optimization of engineering problems // Raleigh, North Carolina, USA: Open Science Publishing, 2018. 202 p.
3. Пантелеев И.В., Чекушкин В.В. Совершенствование полиномиальных методов воспроизведения тригонометрических функций в информационно-вычислительных системах // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2013. - № 1. - С.53-59.
4. Чекушкин В.В., Михеев К.В. Быстродействующие алгоритмы поиска полиномов наилучшего приближения для воспроизведения функциональных зависимостей в информационно-измерительных системах // Измерительная техника. №4, 2016. – С.7-10.
5. Данилин С.Н., Щаников С.А., Борданов И.А., Зуев А.Д., Пантюхин Д.В., Пантелеев С.В. Состояние исследований в области инженерного проектирования и производства нейрокомпьютеров // Алгоритмы, методы и системы обработки данных. 2019. № 1 (39). С. 14-45.
6. Прасолов В.В. Многочлены. – 4-е изд., исправленное. – М.: МЦНМО, 2014. – 336 с.
7. Жиганов С.Н., Михеев К.В. Поиск полиномов Чебышева, обеспечивающих минимизацию площади ошибок // Методы и устройства передачи и обработки информации: Научно-технический журнал. – Вып. 20. / Под ред. В.В. Ромашова, В.В. Булкина. – М.: МИ (филиал) ВлГУ, 2018. С. 100-102.