

Канонический оператор Маслова в задаче о падении электромагнитной волны на полупрозрачный плазменный слой

Е.А. Палкин¹, А.А. Петрович²

¹ Российский новый университет (РосНОУ)

105005, г. Москва, ул. Радио, 22.

E-mail: palkin@rosnou.ru

² Московский физико-технический институт (ГУ МФТИ)

141701, г. Долгопрудный Моск. Обл., институтский пер., 9.

E-mail: aapetrovich@bk.ru

Предложена модификация асимптотического решения в форме канонического оператора Маслова в случае существенного взаимодействия отдельных мод решения, отвечающих различным подмногообразиям лагранжева многообразия задачи. Учет взаимодействия мод реализован путем введения корректирующей функции для меры на многообразии, обеспечивающей равномерное по параметру близости к условиям критического отражения асимптотическое представление решения для всех компонент: отраженной волны и волны, проходящей через слой. В качестве примера рассмотрено падение квазиплоской волны на плазменный слой в случае, когда существенным является эффект полупрозрачности слоя.

Ключевые слова: канонический оператор Маслова, асимптотические решения дифференциальных уравнений с малым параметром, взаимодействие мод, полупрозрачный плазменный слой.

Maslov canonical operator in problem of electromagnetic wave incidence of on a semitransparent plasma layer

Е.А. Palkin¹, А.А. Petrovich²

¹ Russian New University (RNU)

105005, Moscow, st. Radio, 22.

E-mail: palkin@rosnou.ru

² Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT)

141701, Dolgoprudny Mosk. Region, institute per., 9.

E-mail: aapetrovich@bk.ru

The modification of Maslov canonical operator asymptotic solution is presented in the case when the interaction between solution components, corresponding to different Lagrangian submanifolds of the total manifold in problem, is significant. The components interaction, taking into account, is implemented by introduction a correction function for the measure on the manifold, providing a uniform asymptotic representation of solutions with respect to the critical reflection proximity parameter both for the reflected wave and for the wave passing through the layer. As an example, the incidence of a quasi-plane wave on a plasma layer is considered in the case when the effect of the layer translucency is significant.

Keywords: Maslov canonical operator, asymptotic solutions of differential equations with a small parameter, components interaction, translucent plasma layer

Введение

Канонический оператор В.П.Маслова (КОМ) [1-3] как один из видов асимптотических решений дифференциальных уравнений с малым параметром широко применяется в задачах радиофизики (см., например. [4-6]). Основным его достоинством является универсальность формы решения, использующая характеристики лагранжева многообразия $\Gamma(\vec{p}, \vec{q})$, представленного в координатно-импульсном пространстве $\{\vec{p}, \vec{q}\}$ совокупностью фазовых траекторий – решений гамильтоновой системы обыкновенных

дифференциальных уравнений (ОДУ), построенных для гамильтониана задачи $H(\vec{p}, \vec{q})$ и соответствующих ей начальных данных. Развитие метода КОМ с применением методов теории катастроф – волновой теории катастроф (ВТК), позволило еще более унифицировать построение и анализ асимптотических решений в областях фокусировки волн, а также при наличии дифракционных явлений, обусловленных различного рода границами на $\Gamma(\vec{p}, \vec{q})$ (см. [7,8] и цитируемую там литературу).

Важной проблемой в использовании КОМ является проблема учета «взаимодействия» различных асимптотических решений, соответствующих различным подмногообразиям $\Gamma_j(\vec{p}, \vec{q})$ в случае, если гамильтониан $H(\vec{p}, \vec{q})$ порождает несколько многообразий, отвечающих нулевому уровню:

$$\Gamma(\vec{p}, \vec{q}) = \bigcup_j \Gamma_j \Big|_{H(\vec{p}, \vec{q})=0} . \quad (1)$$

В задачах волновой физики это соответствует существованию нескольких собственных волн, а в теории асимптотических решений это соответствует случаю характеристик переменной кратности [9,10].

К классу таких задач относится и задача о падении электромагнитных волн на полупрозрачный плазменный слой [11,12]. Метод КОМ позволяет перенести результаты решения модельных задач на сложные модели неоднородных слоев, используемые в численном прогнозировании ионосферного распространения радиоволн, поскольку он дает возможность получать асимптотические решения для моделей неоднородных сред любой сложности, если только выполняется условие применимости асимптотических разложений, то есть существования малого параметра $h \ll 1$ – соотношения длины волны и масштаба вариаций параметров неоднородной среды. В отличие от [9,10] применение эталонных задач в ситуации (1) позволяет избежать решения системы связанных уравнений переноса для определения амплитудных функций в асимптотических решениях задач.

Построение канонического оператора для задачи о падении волны на полупрозрачный плазменный слой

Рассмотрим алгоритм построения решения в форме КОМ. Для простоты возьмем в качестве примера модельную задачу о падении квазиплоской волны на плазменный слой с параболическим профилем зависимости электронной плотности от координаты x . Эта задача сводится к решению уравнения:

$$\left[\Delta_{xy} + k^2 n^2(x) \right] \psi(x, y) = 0, \quad (2)$$

где

$$n^2(x) = \begin{cases} 1 - \beta^2 * (a^2 - x^2) & \text{при } x \in [-a, +a] \\ 1 & \text{при } x \geq a, x \leq -a . \end{cases} \quad (3)$$

В качестве граничных условий возьмем следующие: условие падения снизу на слой волны с некоторым пространственным спектром, заданным зависимостью угла падения для спектральной компоненты (локально плоской волны) единичной амплитуды от координаты точки входа волны в слой $\theta(y_0)$, и условие отсутствия волны, падающей на слой сверху. Таким образом,

$$\psi_{\text{пад}}(x, y) \Big|_{x=-a, y=y_0} = \exp\left(i k (x \cos \theta(y_0) + y \sin \theta(y_0)) \right) \Big|_{x=-a, y=y_0} . \quad (4)$$

В случае падения на слой плоской волны (с вырожденным пространственным спектром), задача имеет точное решение, представимое через функции Вебера - Эрмита (см., например [11, 13, 14]). Но поскольку нас интересует именно обобщение

асимптотических решений этой задачи на более сложные модели слоев и неплоскую геометрию, то считая, что в задаче (2) – (4) выполнено условие $h = \frac{1}{ka}$, построим асимптотическое решение методом КОМ, используя некоторые результаты из [13-15].

В рассматриваемой ситуации лагранжево многообразие (1) состоит из двух подмногообразий $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ и $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$. Лагранжево подмногообразие $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ построим как семейство решений гамильтоновой системы для гамильтониана

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = H(p_x, p_y, x, y) = p_x^2 + p_y^2 - (1 - \beta^2 * (a^2 - x^2)) \quad (5)$$

и начальных данных, связанных с условием (4). Система ОДУ для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = p_x & \begin{cases} \frac{dp_x}{d\tau} = \begin{cases} \beta^2 x & \text{при } x \in [-a, +a] \\ 0 & \text{при } x \geq a, x \leq -a \end{cases} \\ \frac{dy}{d\tau} = p_y & \begin{cases} \frac{dp_y}{d\tau} = 0 \end{cases} \end{cases}, \quad (6)$$

$$x|_{\tau=0} = -a, \quad y|_{\tau=0} = y_0, \quad p_x|_{\tau=0} = \cos(\theta(y_0)), \quad p_y|_{\tau=0} = \sin(\theta(y_0)), \quad (6')$$

$$H|_{\tau=0} = 0. \quad (6'')$$

Решение системы (6), (6'), то есть многообразие $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$, определяется формулами:

$$\begin{cases} x_1(\tau, y_0) = \begin{cases} -a \operatorname{ch}(\beta\tau) + \frac{\cos(\theta(y_0))}{\beta} \operatorname{sh}(\beta\tau), & \text{при } \tau \in [0, 2\tau_c] \\ \pm(a + (\tau - 2\tau_c)) \cos(\theta(y_0)), & \text{при } \tau \geq 2\tau_c \end{cases} \\ y_1(\tau, y_0) = y_0 + \tau \sin(\theta(y_0)) \\ p_{x1}(\tau, y_0) = \begin{cases} -a\beta \operatorname{sh}(\beta\tau) + \cos(\theta(y_0)) \operatorname{ch}(\beta\tau), & \text{при } \tau \in [0, 2\tau_c] \\ \pm \cos(\theta(y_0)), & \text{при } \tau \geq 2\tau_c \end{cases} \\ p_{y1}(\tau, y_0) = \sin(\theta(y_0)) \end{cases}. \quad (7)$$

Введем для сокращения формул параметр, характеризующий условия отражения, $\gamma = \frac{\cos(\theta(y_0))}{\beta a}$. Тогда в (7) верхнее значение знака "±" соответствует выполнению условия

«прохождения» траектории $\{\vec{p}, \vec{q}\}(\tau, y_0) = \{x, y; p_x, p_y\}(\tau, y_0)$ через слой:

$$\gamma > 1, \quad (8)$$

и, соответственно, значение τ_c находится как решение уравнения:

$$\operatorname{th}(\beta\tau_c) = \gamma^{-1}. \quad (9)$$

Нижнее значение знака "±" соответствует выполнению условия «отражения» траектории от плазменного слоя:

$$\gamma < 1, \quad (10)$$

и значение τ_c находится как решение уравнения:

$$\operatorname{th}(\beta\tau_c) = \gamma. \quad (11)$$

При этом для случая (8) точка τ_c соответствует в координатном пространстве точке пересечения траекторией уровня максимума электронной плотности, а для случая (10) –

точке отражения траектории от слоя $x_{ref} = -a\sqrt{1-\gamma^2}$ (точке с минимальным расстоянием от максимума слоя до траектории с фиксированным значением параметра y_0).

Для учета эффекта полупрозрачности неоднородного слоя, необходимо построить и подмногообразие $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$, на котором гамильтониан (5) также имеет нулевое значение, а начальные условия соответствуют возбуждению волн частичного отражения, или волн просачивания, которые не описываются каноническим оператором на $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$. Следуя [15], данное подмногообразие зададим семейством решений системы (6) со следующими начальными данными:

$$\begin{aligned} x_2|_{\tau=\tau_c} = -x_1(\tau_c, y_0), \quad y_2|_{\tau=\tau_c} = y_1(\tau_c, y_0), \quad p_{x2}|_{\tau=\tau_c} = -p_{x1}(\tau_c, y_0), \quad p_{y2}|_{\tau=\tau_c} = p_{y1}(\tau_c, y_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда, в силу симметрии модели слоя, семейство решений системы ОДУ (6), отвечающее многообразию $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$, имеет вид:

$$\begin{cases} x_2(\tau, y_0) = -x_1(\tau, y_0) & \text{при } \tau \geq \tau_c \\ y_2(\tau, y_0) = y_0 + \tau \sin(\theta(y_0)) \\ p_{x2}(\tau, y_0) = -p_{x1}(\tau, y_0) & \text{при } \tau \geq \tau_c \\ p_{y2}(\tau, y_0) = \sin(\theta(y_0)) \end{cases} \quad (13)$$

Решения (13) можно продлить в область $0 \leq \tau \leq \tau_c$. Для более сложных моделей построение многообразия $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ сводится к интегрированию системы (6) для $\tau \leq \tau_c \cup \tau_c \leq \tau$ с начальными данными вида (12) для $\tau = \tau_c$. Структуру лагранжева многообразия $\Gamma(\vec{p}, \vec{q}) = \bigcup_{j=1,2} \Gamma_j|_{H(\vec{p}, \vec{q})=0}$ рассматриваемой задачи иллюстрирует рисунок 1.

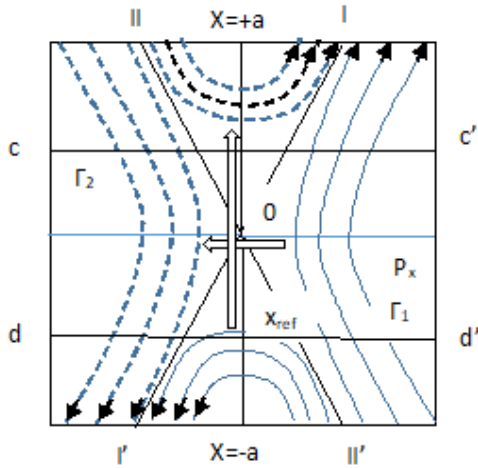


Рис. 1. Структура многообразия $\Gamma(\vec{p}, \vec{q})$ задачи о падении волны на параболический плазменный слой

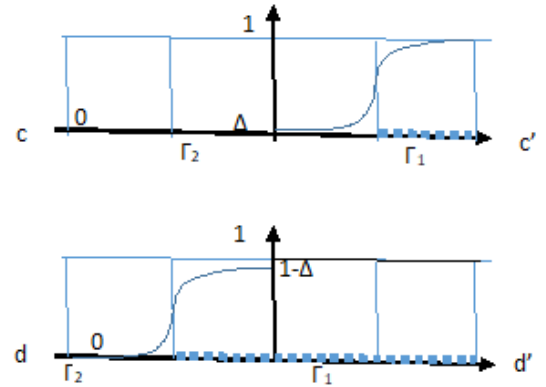


Рис. 2. Качественная зависимость $D_l(p_x)$ на многообразии $\Gamma(\vec{p}, \vec{q})$ в сечениях cc' и dd'

Вследствие отсутствия волны, падающей сверху на слой, из решения в форме КОМ исключается часть подмногообразия $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$: $x_2 \geq 0, p_{x2} \leq 0$. То есть для $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ имеется граница, состоящая из линий:

$$x_2 \geq 0, p_{x2} = 0 \text{ и } x_2 = 0, p_{x2} \leq 0. \quad (14)$$

Природа этих границ связана с особыми точками интегрального представления функции Вебера-Эрмита [16] и отражает факт «взаимодействия» стационарных точек коротковолновых асимптотик с точкой полюса подынтегральной функции. При этом линии $x=0$ и $p_x=0$ представляют собой линии Стокса, на которых асимптотики функций Вебера-Эрмита имеют разрыв Δ экспоненциально малого порядка по параметру h^{-1} . Сепаратриса I-I', заданная уравнением:

$$x(\tau, y_0) = -\frac{1}{\beta} p_x(\tau, y_0); \quad (\gamma=1) \quad , \quad (15)$$

выделяет части подмногообразий $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ и $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$, относящиеся к условиям отражения или прохождения через слой соответствующих фазовых траекторий (7), (13). Сепаратриса II-II':

$$x(\tau, y_0) = \frac{1}{\beta} p_x(\tau, y_0) \quad , \quad (16)$$

разделяет подмногообразия $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ и $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$. При этом $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ отвечает падающей снизу волне и далее проходящей через слой, или отраженной от слоя, а $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ - волнам частичного («надбарьерного») отражения, формирующимися при прохождении слоя падающей снизу волной, и волнам частично просачивающимся (волны «подбарьерного туннелирования») через слой, связанным с падающей снизу и отраженной слоем волной. Эти эффекты взаимодействия между множествами $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ и $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ на рисунке 1 схематически отражены контурными стрелками. Отметим также, что для многообразия $\Gamma(\vec{p}, \vec{q})$ точка $\{x=0, p_x=0, p_y=0 \text{ и } \beta a=1\}$ является точкой покоя и решение в форме КОМ в ее окрестности не существует [1,2].

Принимая во внимание такую структуру многообразия $\Gamma(\vec{p}, \vec{q})$ и указанные особенности, объединим два подмногообразия $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ и $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$, введя в рассмотрение меру на $\Gamma(\vec{p}, \vec{q})$, учитывающую «переход» решения с подмногообразия $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ на подмногообразии $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ и переход через линии Стокса. Другими словами, используя модельную задачу о частичном просачивании, или частичном отражении волны от параболического плазменного слоя, введем непрерывную по параметру γ (относительно сепаратрисы I-I') и имеющую экспоненциально малый разрыв на линиях Стокса меру, отражающую взаимодействие квазиплоских волн (компонент пространственного спектра) на разных частях многообразия $\Gamma(\vec{p}, \vec{q})$.

Тогда асимптотическое решение задачи (2) – (4) в форме КОМ будет иметь вид:

$$\psi_{asympt}(x, y) = \sum_{j=1,2} \left[\sum_{kj} \hat{K} \varphi \Big|_{U_{kj}} \right], \quad (17)$$

где U_{kj} - карта канонического атласа, относящаяся к атласу одного из подмногообразий $\Gamma_j(\vec{p}_j, \vec{q}_j)$; $j=1,2$ и покрывающая некоторую окрестность исследуемой точки $\{x, y\}$ [1-3]. Суммирование по kj ведется по всем картам, покрывающим заданную точку, а суммирование по j учитывает вклад решений на картах как подмногообразия $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$, так и подмногообразия $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$. На каждой канонической карте U_{kj}

$$\hat{K}\varphi|_{U_{kj}} = \tilde{F}_{\vec{p}_I \rightarrow \vec{q}_I}^{h^{-1}} \left[\exp\left(\frac{i}{h} S_I(\vec{p}_I, \vec{q}_I)\right) \mu_I^{1/2} D_I(\vec{p}_I, \vec{q}_I) \varphi(\vec{p}_I, \vec{q}_I) \right] e^{-i\frac{\pi}{2} \text{Im} d|_{U_{kj}}}. \quad (18)$$

В формуле (18) под знаком обратного частичного преобразования Фурье стоит выражение с быстро осциллирующим ядром, содержащее стандартные элементы канонического оператора (см. [1-3]). Во внеэкспоненциальный множитель введена корректирующая функция $D_I(\vec{p}_I, \vec{q}_I)$, учитывающая описанные выше эффекты. Используя формулы из [13, 14], эту функцию следует выбрать в виде:

$$D(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, p_x > 0, \\ R(\gamma) & \text{при } x < 0, p_x < 0, \\ T(\gamma) & \text{при } x > 0, p_x > 0, \\ 0 & \text{при } x > 0, p_x < 0. \end{cases} \quad (19)$$

$$R = e^{-i\frac{\pi}{2}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{k\pi}{4}\beta a^2(1-\gamma^2)} * \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{k}{2}\beta a^2(1-\gamma^2)\right), \quad (20)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{k\pi}{4}\beta a^2(1-\gamma^2)} * \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{k}{2}\beta a^2(1-\gamma^2)\right). \quad (21)$$

Качественный характер поведения корректирующей функции $D_I(\vec{p}_I, \vec{q}_I)$ представлен на рисунке 2. Как видно из приведенных выражений, корректирующая функция зависит только от параметра γ , который задается для каждой фазовой траектории, то есть значением y_0 , и не зависит от τ . Поэтому уравнение переноса для определения функции $\varphi(\vec{p}_I, \vec{q}_I) = \varphi(y_0(\vec{p}_I, \vec{q}_I), \tau(\vec{p}_I, \vec{q}_I))$, появляющееся при подстановке (17) в (2), не изменится, и выражение (18) остается канонической формой асимптотического решения задачи в соответствии с методом КОМ. Также из асимптотик коэффициентов отражения и прохождения в (19) – (21) [14] следует, что эффект Стокса на линиях Стокса имеет следующий порядок малости:

$$\Delta \sim e^{-k\pi\beta a^2(1-\gamma^2)} = e^{-k\pi\beta x_{\text{ref}}^2} \text{ при } p_x = 0,$$

$$\Delta \sim e^{-\frac{k\pi\beta a^2}{2}(\gamma^2-1)} = e^{-\frac{k\pi p_x^2}{2\beta}} \text{ при } x = 0.$$

Выводы

Важным следствием представления асимптотического решения в виде (17) – (21) является возможность его анализа с позиции волновой теории катастроф [7,8] и построения равномерных асимптотических формул через специальные функции, используемые в рамках этой теории, то есть рассматривать совместно совокупность особенностей первичной, падающей на слой, волны и волн, сформированных за счет эффекта полупрозрачности плазменного слоя.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ №20-12-00299.

Литература

1. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. – М.: изд. МГУ. 1965. – 553 с.
2. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М.: Наука. 1976. – 296 с.
3. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. – М.: Наука. 1978. – 352 с.

4. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. Учебное пособие. М., МФТИ. 1982. – 159 с.
5. Ipatov E.B., Lukin D.S. and Palkin E.A. Maslov canonical operator in problems of numerical simulation of diffraction and propagation of waves in inhomogeneous media./Soviet journal of numerical analysis and mathematical modelling. VNU Sciencepress BV. 1990. V.5. N6. P.465-488.
6. Ипатов Е.Б., Палкин Е.А., Лукин Д.С., Ипатов Д.Е. Численное моделирование структуры электромагнитных полей в зонах каустической фокусировки для регулярно неоднородной модели ионосферы. //Нелинейный мир, 2012, т.10, N4, С.222-229.
7. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Методы моделирования распространения электромагнитных волн в ионосфере с учетом распределений электронной концентрации и магнитного поля Земли. //Радиотехника и электроника, 2014, т.59, N12, С.1180-1187.
8. Лукин Д.С., Палкин Е.А., Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Развитие математического моделирования распространения радиоволн в ионосфере Земли на основе волновой теории катастроф и канонического оператора Маслова. //XXV Всероссийская открытая научная конференция «Распространение радиоволн», посвященная 80-летию отечественных ионосферных исследований (РРВ – 25). Труды конференции, Томск, 4 - 9 июля 2016 г. Том 1. Пленарные доклады. Секция 1. Распространение радиоволн и дистанционное зондирование верхней атмосферы и космического пространства. С. 40 – 50.
9. Кучеренко В.В. Асимптотика решений системы $\hat{A}(x, -i\frac{\partial}{\partial x})u = 0$ в случае характеристик переменной кратности. //Известия АН СССР, Математика, 1974, т.58, N3, С.725-650.
10. Кучеренко В.В. Параметрикс для уравнений с вырождающимся символом. //Доклады АН СССР, 1976, т.229, вып. 4, С.797-800.
11. Rydbeck O. On the propagation of radio waves. //Trans. Chalmers Univ. Sweden, 1944, №34, 167 p.
12. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука. 1967. – 684 с.
13. Палкин Е.А., Петрович А.А. Асимптотические представления решения задачи о структуре волнового поля при падении плоской волны на полупрозрачный неоднородный плазменный слой (модельная задача). //Радиотехника и электроника, 2021, т.66, N1, С.18-26.
14. Палкин Е.А., Петрович А.А. Равномерная асимптотика коэффициентов отражения и прохождения плоской волны для модели плазменного слоя с параболическим профилем электронной концентрации. //Всероссийская научная открытая конференция «Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн» - «Муром 2019». Материалы конференции, Муром, 28 - 30 мая 2019 г. Секция 1. Теоретические и прикладные вопросы распространения и дифракции волн. С. 38 – 44.
15. Palkin E.A., Petrovich A.A. Diffraction-beam theory of HF radio waves propagation in the description of ionospheric layers translucency effect. //Proceedings of 2019 Russian Open Conference on Radio Wave Propagation (RWP), 2019, Vol.1, P. 500 – 503.
16. Палкин Е.А., Петрович А.А. Специальные асимптотики функций параболического цилиндра (функций Вебера-Эрмита) с большим параметром. // Вестник российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление». 2018, № 1, С. 18 – 27.