

Применение метода бихарактеристик для восстановления эффективной частоты соударений электронов в ионосфере

А.С. Крюковский, Д.С. Лукин, Е.В. Михалёва, Д.В. Растягаев

АНО ВО «Российский Новый Университет»

105005, г. Москва, ул. Радио, 22.

E-mail: kryukovsky56@yandex.ru, rdv@rosnou.ru

Развит метод восстановления эффективной частоты соударений электронов в ионосфере Земли, на основе данных об ослаблении коротковолнового излучения при вертикальном зондировании ионосферы частотно-модулированным радиосигналом. Численное моделирование проведено на основе метода бихарактеристик Гамильтона-Лукина. Ключевые слова: ионосфера, диагностика, эффективной частоты соударений, зондирование, бихарактеристики, радиосигнал, каустика, амплитуда, расходимость.

Application of the bi-characteristic method for reconstructing the effective frequency of electron collisions in the ionosphere

A.S. Kryukovsky, D.S. Lukin, E.V. Mikhaleva, D.V. Rastyagaev

Russian New University

105005, Moscow, st. Radio, 22.

E-mail: kryukovsky56@yandex.ru, rdv@rosnou.ru

A method has been developed to reconstruct the effective frequency of electron collisions in the Earth's ionosphere, based on data on the attenuation of short-wave radiation during vertical sounding of the ionosphere by a frequency-modulated radio signal. Numerical modeling was carried out based on the Hamilton-Lukin bi-characteristic method. Keywords: ionosphere, diagnostics, effective collision frequency, sounding, bi-characteristics, radio signal, caustics, amplitude, divergence.

Введение

Настоящее исследование посвящено разработке метода восстановления эффективной частоты соударений электронов в ионосфере Земли по задержке и амплитудным характеристикам линейно частотно-модулированных (ЛЧМ) сигналов ионозонда вертикального зондирования [1-3]. Актуальность работы определяется необходимостью диагностики и контроля ионосферы в связи с существенным влиянием состояния ионосферных слоёв на работу радиосистем различного назначения: радиосвязи, навигации (позиционирования), радиолокации, а также для постоянного мониторинга экстремальных явлений в атмосфере Земли [4]. В работе выполнено математическое моделирование распространения радиоволн в ионосферной плазме, ориентированное на оперативные данные вертикального зондирования, поскольку ионозонды вертикального зондирования (ВЗ) являются одним из наиболее апробированных и эффективных средств диагностики ионосферы [5].

Методы алгоритмы

В работе предполагается, что из данных ВЗ известна зависимость задержки отразившегося от ионосферы сигнала, а также амплитуда A принятого сигнала от частоты f . Ослабление амплитуды зондирующего сигнала зависит от эффективной частоты соударений в соответствии с формулой [6]:

$$A = E_0 D \exp[-\psi] , \quad (1)$$

в которой E_0 – амплитуда поля на расстоянии r_0 от источника вне плазменных слоёв. Будем считать, что изотропный источник излучения расположен в начале координат. Тогда:

$$E_0 = \frac{\sqrt{30W}}{r_0} \text{ (В/м)}, \quad (2)$$

причём W – мощность излучателя (в данной работе $W = 1$ кВт). Входящий в формулу (1) коэффициент D это расходимость лучевого потока. Поскольку величины A и E_0 определяются из эксперимента, то, зная расходимость, по формуле

$$\psi = -\ln \frac{A}{DE_0} \quad (3)$$

можно найти поглощение ψ , содержащее эффективную частоту соударений ν_e .

Входящую в формулы (1) и (3) расходимость D можно найти с помощью расширенной системы бихарактеристик Лукина [6-10]

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{2\vec{k}c^2 - \omega^2 \partial \varepsilon / \partial \vec{k}}{\partial(\varepsilon\omega^2) / \partial \omega}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = -\frac{\omega^2 \partial \varepsilon / \partial \vec{r}}{\partial(\varepsilon\omega^2) / \partial \omega}, \quad (4)$$

$$\frac{d\vec{r}_\zeta}{dt} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{2\vec{k}c^2 - \omega^2 \partial \varepsilon / \partial \vec{k}}{\partial(\varepsilon\omega^2) / \partial \omega} \right), \quad \frac{d\vec{k}_\zeta}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\omega^2 \partial \varepsilon / \partial \vec{r}}{\partial(\varepsilon\omega^2) / \partial \omega} \right), \quad (5)$$

$$\frac{d\vec{r}_\eta}{dt} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{2\vec{k}c^2 - \omega^2 \partial \varepsilon / \partial \vec{k}}{\partial(\varepsilon\omega^2) / \partial \omega} \right), \quad \frac{d\vec{k}_\eta}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\omega^2 \partial \varepsilon / \partial \vec{r}}{\partial(\varepsilon\omega^2) / \partial \omega} \right), \quad (6)$$

так как расходимость вычисляется в изотропной среде как корень из отношения якобиана J к J_0 по формулам [9,11]:

$$D = \sqrt{\left| \frac{J_0}{J} \right|}, \quad J = \begin{vmatrix} k_x & k_y & k_z \\ x'_\zeta & y'_\zeta & z'_\zeta \\ x'_\eta & y'_\eta & z'_\eta \end{vmatrix}, \quad J_0 = J|_{r=r_0}. \quad (7)$$

Система (4), дополненная начальными условиями [8,10]:

$$k_x(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \zeta, \quad k_y(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \cos \eta, \quad k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \sin \eta, \quad \vec{r}(0) = 0, \quad (8)$$

определяет $\vec{r} = (x, y, z)$ – декартовы координаты лучей и волновые вектора $\vec{k}(t)$ как функции группового времени t . Параметры ζ, η в начальных условиях это начальные углы выхода луча (для вертикального луча $\zeta = 0, \eta = \pi/2$), а ε_0 – значение эффективной диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon(\vec{r}, \vec{k}, \omega)$:

$$\varepsilon = 1 - X, \quad X = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi e^2 N(z)}{m_e \omega^2} \quad (9)$$

в источнике излучения [8]. В формуле (9) N это электронная концентрация, X это отношение квадрата плазменной круговой частоты ω_p к квадрату рабочей круговой частоте ω , e – заряд электрона, m_e – масса электрона, c – скорость света. Для рассматриваемой в работе модели ионосферы $\varepsilon_0 \approx 1$. Круговая частота ω связана с рабочей частотой источника излучения традиционным соотношением: $\omega = 2\pi f$.

В работе рассмотрена плоскостроистая среда, для которой эффективная диэлектрическая проницаемость среды зависит только от высоты z и не зависит от \vec{k} . Поэтому компоненты волнового вектора k_x и k_y постоянны вдоль траектории (см. (4)), а для вертикального луча они равны нулю ($k_x = k_y = 0$). Тогда выражение для якобиана J (7) можно упростить и представить в виде [12]:

$$J = k_z \begin{vmatrix} x'_\zeta & y'_\zeta \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix}. \quad (10)$$

После определения компонент волнового вектора k_x и k_y в системе (4) остаются два уравнения ($x(t) = y(t) = 0$), причем два из них относительно $z(t)$ и $k_z(t)$ образуются подсистему:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2k_z c^2}{\partial(\varepsilon\omega^2)/\partial\omega}, \quad \frac{dk_z}{dt} = -\frac{\omega^2 \partial\varepsilon/\partial z}{\partial(\varepsilon\omega^2)/\partial\omega} \quad (11)$$

с начальными условиями:

$$k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0}, \quad z = 0. \quad (12)$$

Помимо компонент волнового вектора для определения якобиана J согласно формуле (7) необходимо найти производные x и y по начальным углам выхода луча ζ и η . Для этого необходимо проинтегрировать уравнения (5)-(6)[9], дополненные начальными условиями:

$$\begin{aligned} k'_{x\zeta}(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos\zeta, k'_{x\eta}(0) = 0, k'_{y\zeta}(0) = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin\zeta \cos\eta, \bar{r}'_\zeta(0) = 0, \bar{r}'_\eta(0) = 0, \\ k'_{y\eta}(0) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos\zeta \sin\eta, k'_{z\zeta}(0) = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin\zeta \sin\eta, k'_{z\eta}(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos\zeta \cos\eta, \end{aligned} \quad (13)$$

которые в нашем случае после упрощения имеют вид [12]:

$$k'_{x\zeta}(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0}, \quad k'_{x\eta}(0) = k'_{y\zeta}(0) = k'_{z\zeta}(0) = k'_{z\eta}(0) = 0, \quad k'_{y\eta}(0) = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0}. \quad (14)$$

Из (5)-(6) с учетом (14) можно установить, что:

$$k'_{x\zeta} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0}, \quad k'_{y\zeta} = 0, \quad k'_{x\eta} = 0, \quad k'_{y\eta} = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0}. \quad (15)$$

Вычислив расходимость D и зная из эксперимента амплитуду A и начальную амплитуду E_0 перейдем к нахождению эффективной частоты соударений ν_e . Поглощение волны вдоль траектории связано с мнимой частью диэлектрической проницаемости среды ε_2 соотношением [6,13]:

$$\psi = -\frac{\omega}{2} \int_0^t \varepsilon_2 dt. \quad (16)$$

Выражение для мнимой части диэлектрической проницаемости среды ε_2 приближенно имеет вид [1,6]:

$$\varepsilon_2 \cong -\frac{XZ}{1+Z^2}, \quad Z = \nu_e / \omega. \quad (17)$$

Если предположить, что величиной Z^2 в знаменателе (17) можно пренебречь, то

$$\varepsilon_2 \approx -XZ. \quad (18)$$

Приравняем поглощение ψ в формулах (16) и (3). Тогда получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\frac{V_c}{\omega^2} \int_0^{t_m} \nu_e N dt = L, \quad V_c = \frac{4\pi e^2}{m_e} \quad (19)$$

Правая часть уравнения (19) L

$$L = -\ln \frac{A}{DE_0}, \quad (20)$$

является функцией рабочей частоты f и вычисляется в точке приёма сигнала. В (19) как t_m обозначено время, за которое сигнал проходит расстояние от источника до точки отражения от ионосферы. Эта величина также является функцией частоты. Так

как эффективная частота соударений ν_e и электронная концентрация N являются функциями высоты z , которая зависит от группового времени t , то функция $z(t)$ также зависит от частоты и вычисляется вдоль лучевой траектории. Рассмотрим решение уравнения (19) методом итераций [12]. Для сокращения записи обозначим $G = \nu_e N$. Поскольку ниже определённой высоты электронная концентрация равна нулю, то для некоторой частоты f_0 , для которой время t_m равно t_{m0}

$$\int_0^{t_{m0}} G dt = 0. \quad (21)$$

Разделим частотный интервал (f_0, f_{lev}) на n частей $(f_0, f_1, \dots, f_j, \dots, f_n = f_{lev})$. На каждом интервале будем считать функцию G постоянной ($G = G_j$) и найдём величины t_{mj} для каждой f_j . В результате получим:

$$G_1 = L_1 \frac{\omega_1^2}{t_{m1} - t_{m0}}, G_2 = L_2 \frac{\omega_2^2}{t_{m2} - t_{m1}} - G_1 \frac{t_{m1} - t_{m0}}{t_{m2} - t_{m1}}, G_j = L_j \frac{\omega_j^2}{t_{m,j} - t_{m,j-1}} - \sum_{i=1}^{j-1} G_i \frac{t_{m,i} - t_{m,i-1}}{t_{m,j} - t_{m,j-1}}, \quad j \geq 2. \quad (22)$$

Предполагая, что зависимость электронной концентрации $N(z)$ от высоты z известна, то есть уже восстановлена по зависимости задержки сигнала от частоты излучения, и учитывая, что величины G_j это произведения эффективной частоты соударений электронов и электронной концентрации в точке отражения, находим эффективную частоту соударений как функцию высоты.

Результаты численного моделирования

Рассмотрим пример реализации изложенного выше алгоритма. Предполагается, пользуясь приведенными выше формулами, сначала рассчитать амплитуду поля на разных частотах в точке приёма, а потом, применяя изложенный выше алгоритм (см. формулы (21), (22)), восстановить эффективную частоту соударений и сравнить модельные и расчетные значения. На рис. 1 приведена модельная зависимость электронной концентрации от высоты. Она показана как линия, так и фоном. В отличие от [12], в данной работе рассмотрена однослойная модель, причем на рис. 1 а показан весь ионосферный слой, а на рис. 1 б та часть ионосферы, которая доступна сигналам ВЗ.

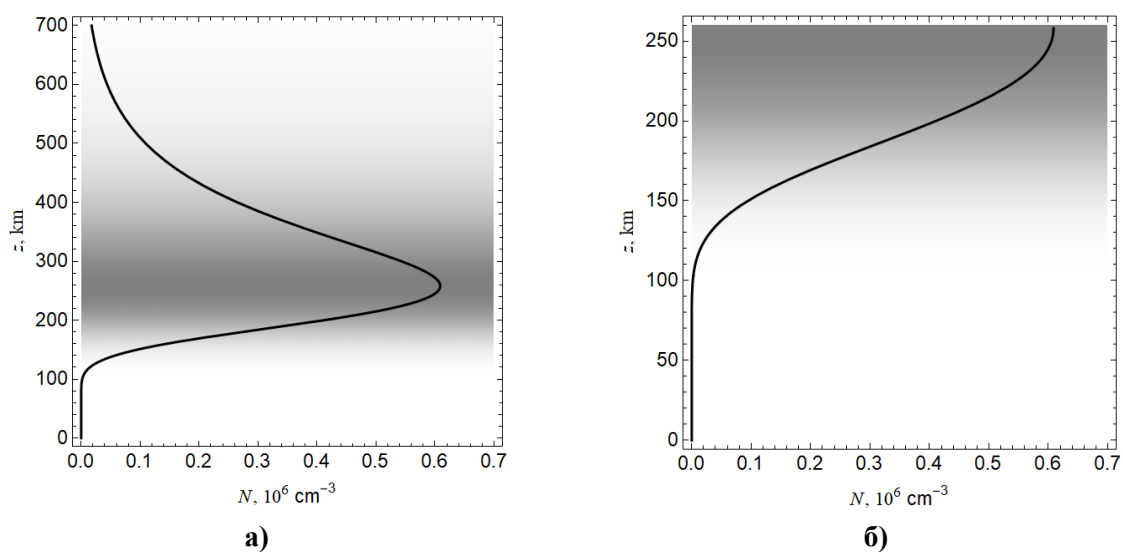


Рис. 1. Зависимость электронной концентрации от высоты: а) – полный профиль, б) – фрагмент

На рис. 2 а и б толстой жёлтой линией показана зависимость эффективной частоты соударений электронов от высоты в ионосферной плазме в соответствии с экспериментальными данными [12].

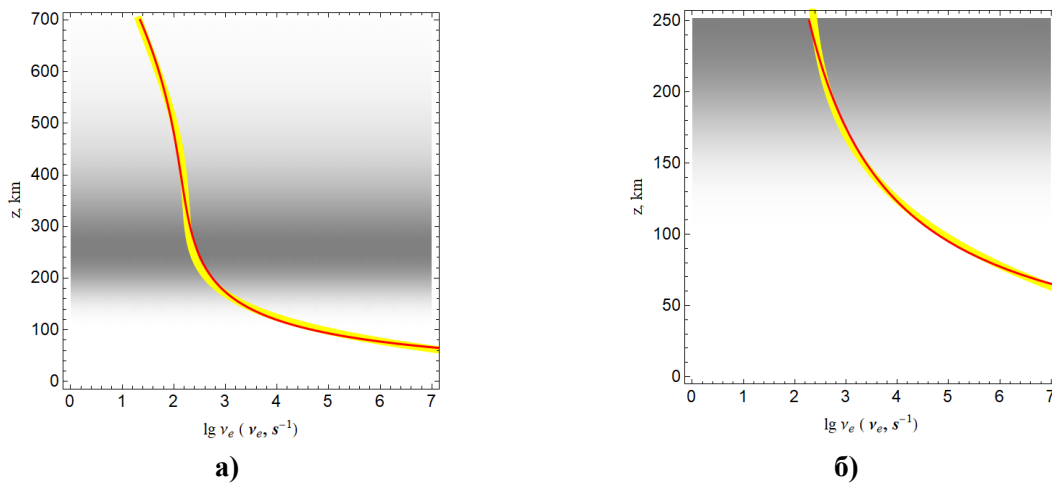


Рис. 2. Зависимость логарифма частоты ν_e от высоты: а) – полный профиль, б) – фрагмент

Тонкой красной линией на рис.2 а показана аппроксимация эффективной частоты соударений, полученная методом наименьших квадратов. Зависимость достаточно сложная и может быть описана формулой:

$$\lg \nu_e = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \frac{b_1}{z}, \quad (23)$$

в которой $a_0 \approx -1.02341$, $b_1 \approx 498.938$, $a_1 \approx 0.00799524$, $a_2 \approx -8.03841 \cdot 10^{-6}$. Однако эффективная частота соударений может быть восстановлена по данным ВЗ только в нижней части ионосферы, то есть не выше максимума слоя F2. Для этой области (рис. 2б) аппроксимация проще, и может быть описана гиперболической зависимостью:

$$\lg \nu_e = a + \frac{b}{z}, \quad a=0.61677, \quad b=416.177, \quad (z, \text{ км}) \quad (24)$$

Эта зависимость характерна для высот ниже максимума слоя F2. В формула (23) и (24) высота z выражена в километрах.

На рис. 3 и 4 приведены результаты решения системы бихарактеристических уравнений (11)-(12). На рис.3 показаны вертикальная лучевая траектория в ионосфере в координатах (x, z) (рис. 3 а) и лучевые траектории ЛЧМ сигнала в координатах (t, z) (рис. 3 б). При этом частота f меняется от 1 МГц (фиолетовая линия) до 6.993 МГц (красная линия) в соответствии с цветами спектра. Очевидно, что время распространения сигнала возрастает с ростом частоты.

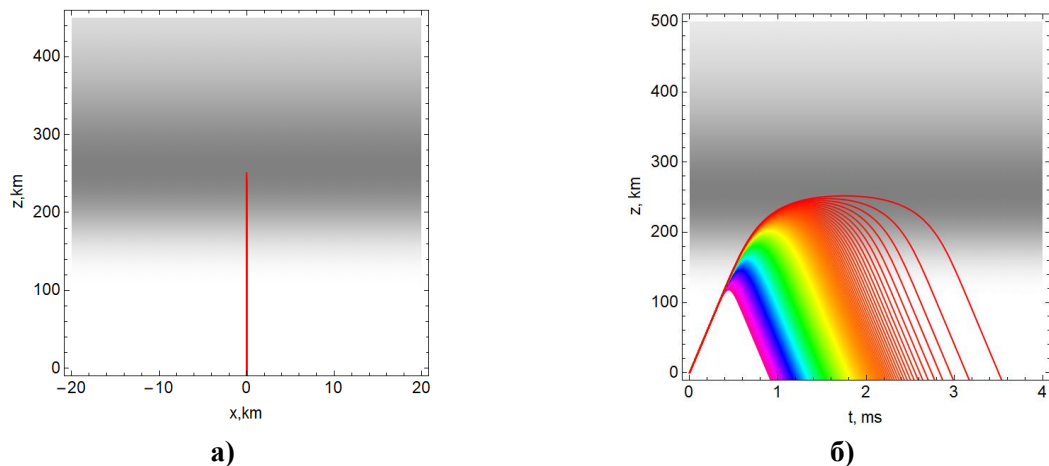


Рис. 3. Лучевая траектория: а) – вертикальная лучевая траектория в ионосфере, б) – лучевые траектории ЛЧМ сигнала в координатах (t, z)

На рис. 4 показаны зависимости вертикальной компоненты волнового вектора k_z от времени t (рис. 4 а) от высоты z (рис. 4 б).

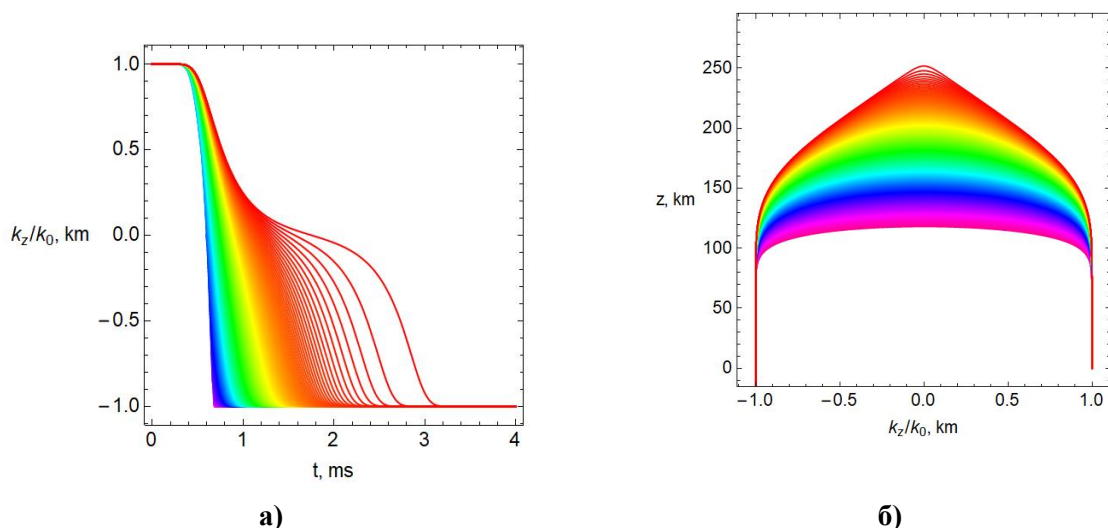


Рис. 4. Зависимость вертикальной компоненты волнового вектора: а) – от времени, б) – от высоты

Смысл цветовой раскраски линии рисунков тот же, что и на рис. 3. При построении рисунков выполнена нормировка волнового вектора на величину $k_0 = k_z(0)$, которая является функцией частоты (12). Анализируя рис.4, можно проследить, как волновой вектор меняется в ионосфере, уменьшаясь до 0 в точке отражения, меняет знак и опять по модулю возрастает. Луч покидает ионосферу, когда отношение k_z/k_0 становится равным -1 .

На рис. 5 приведены зависимости ослабления A_m сигнала от времени (рис. 5 а) и высоты (рис. 5 б) вдоль лучей, соответствующих различным частотам, рассчитанные по формуле:

$$A_m = -20 \lg \sqrt{\left| \frac{J_0}{J} \right|}. \quad (25)$$

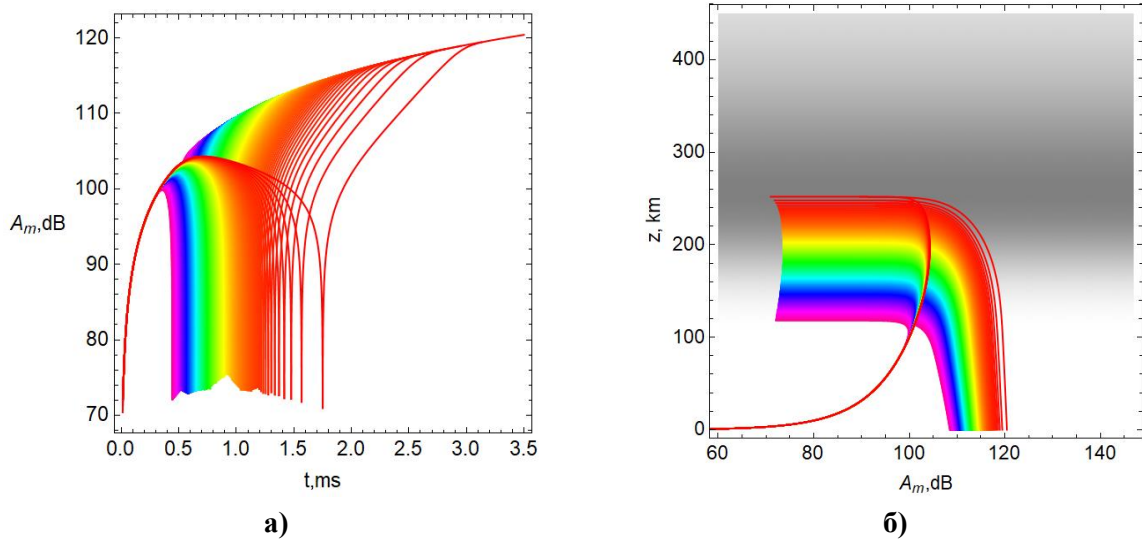


Рис. 5. Зависимость амплитуды сигнала: а) – от времени, б) – от высоты

Если проследить поведение кривой вдоль определенного луча, то видно, что при движении вдоль луча от источника ослабление резко увеличивается (до 100 дБ), потом резко падает в точке отражения, соответствующей каустике [13], а потом опять резко возрастает, когда луч стремится обратно в точку излучения. На каустике в лучевом приближении амплитуда обращается в бесконечность. Хотя из рис.5 это не очевидно, более точные расчеты показывают, что в области каустики (точки отражения) и в источнике $A_m \rightarrow -\infty$.

На рис. 6 показана зависимость от частоты высоты отражения сигнала, вычисленная по исходным данным (рис. 6 а), и зависимость времени прихода луча в точку отражения (рис. 6 б). И высота отражения сигнала, и время t_m растут с ростом частоты. Особенно резкий рост времени прихода луча в точку отражения наблюдается на частотах, близких критической $f_m \approx 7$ МГц.

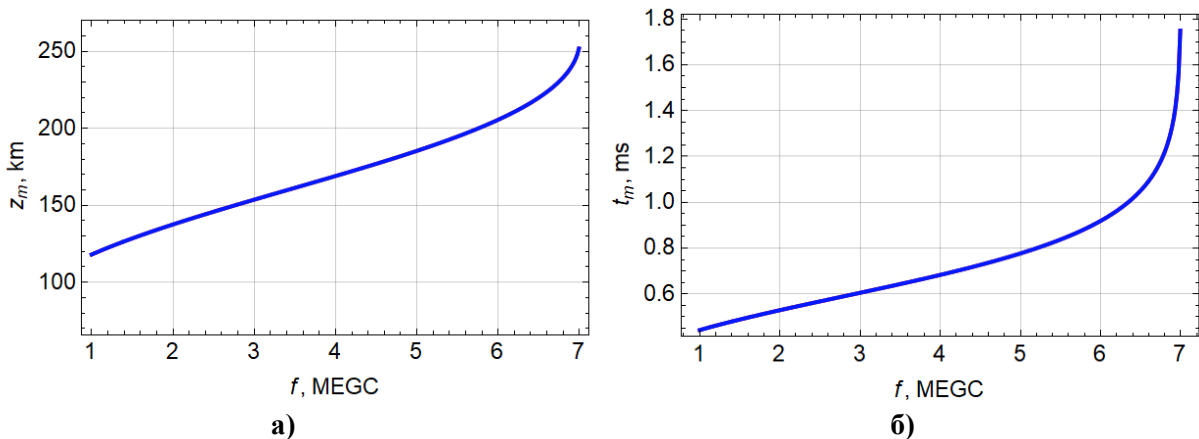


Рис. 6. Зависимость от частоты: а) – высоты отражения, б) – времени прихода луча в точку отражения

Нетрудно получить график зависимости высоты отражения сигнала от задержки t_m , исключив частоту f (см. рис. 7). В отличие от двуслойной модели [12], кривая плавная и взаимно-однозначная. На рис. 8 показана зависимость поглощения $-\psi$ от частоты f , построенная по формулам (16), (17) в соответствии с графиком логарифма частоты соударений (рис. 2 б).

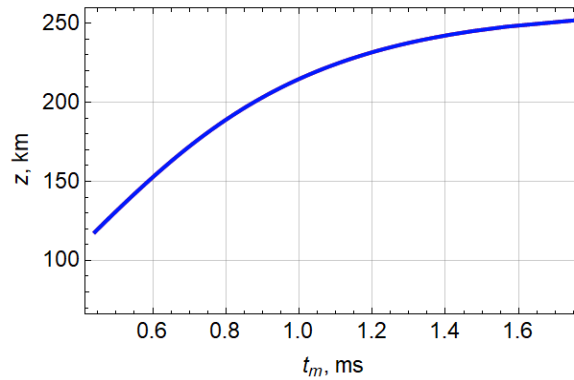


Рис. 7. Зависимость высоты отражения от задержки

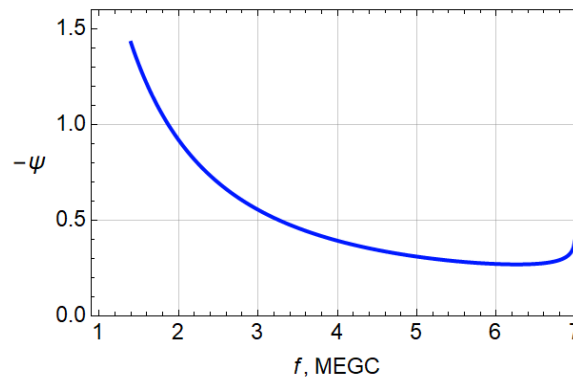


Рис. 8. Зависимость поглощения $-\psi$ от частоты f

На рис. 9 а - 9 б приведены зависимости амплитуды сигнала в точке приёма A (1) и функции $L(20)$ от частоты f . Амплитуда отражённого от ионосферы сигнала (рис. 9 а) сначала нарастает с увеличением частоты, потом резко убывает. Зависимость функции $L(20)$ от частоты f более плавная (рис. 9 б), так как она пропорциональна логарифму отношения амплитуды и расходимости, умноженной на постоянный коэффициент. Красной линией показана экстраполяция кривой.

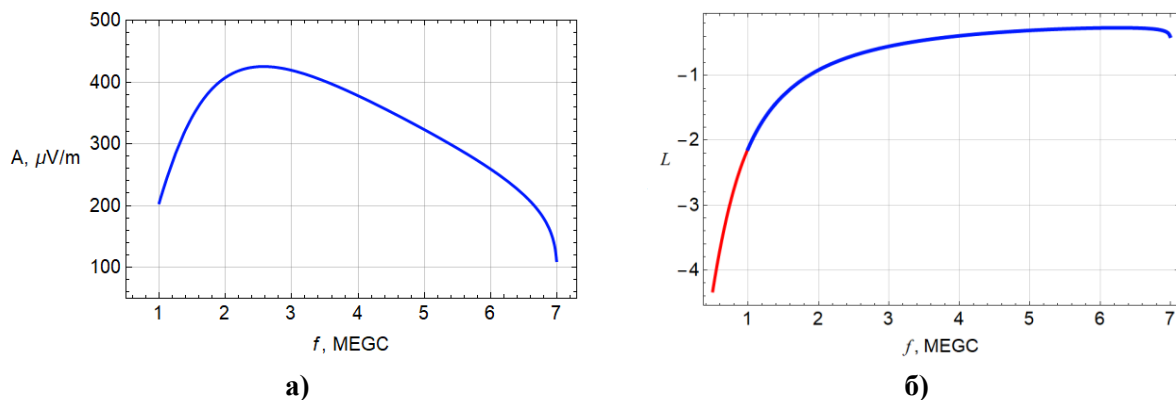


Рис. 9. Амплитуда: а) – зависимость амплитуды отражённого от ионосферы сигнала от частоты, б) – логарифм амплитудной функции от частоты

На рис. 10 а и б показаны результаты моделирования зависимости эффективной частоты соударений ν_e от высоты z . Жёлтой линией показана модельная зависимость эффективной частоты соударений от высоты, а зелёной – расчётные значения. Видно, что с приемлемой точностью модельные и расчётные значения совпадают, причём точность совпадения увеличивается высотой. На рис. 10 б помимо моделирования

зависимость эффективной частоты соударений ν_e приведены экстраполяционные кривые, построенные по формуле (24) (красная линия) и по формуле (26):

$$\lg \nu_e = a + \frac{b}{z}, \quad a=0.164442, \quad b=483.512, \quad (z, \text{ км}), \quad (26)$$

построенной по расчётным данным (синяя линия). Видно, что совпадение удовлетворительное.

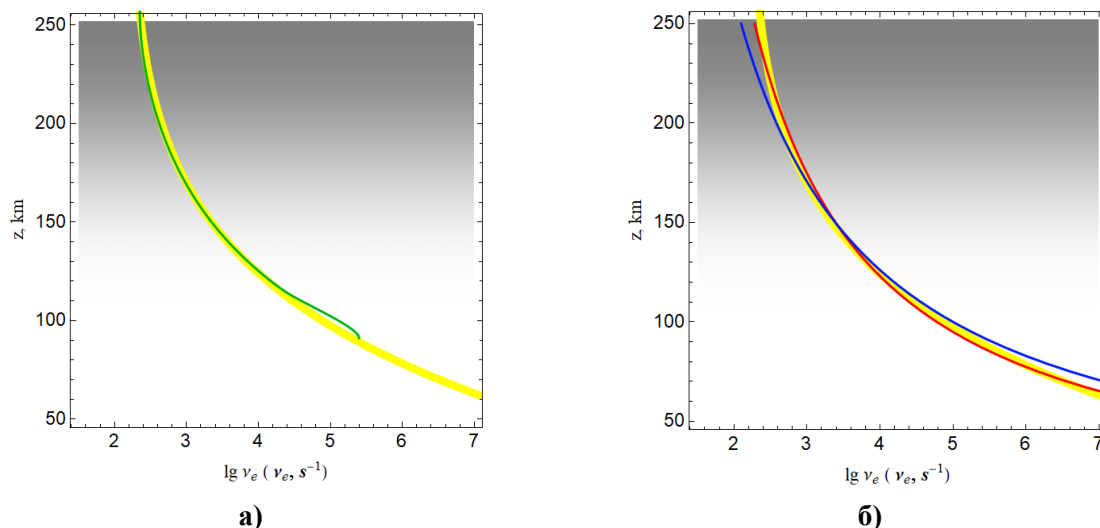


Рис. 10. Частота соударений: а) – сопоставление зависимости от высоты модельной и расчётной частоты соударений, б) – аппроксимация эффективной частоты соударений

Заключение

Таким образом, в работе развит метод восстановления эффективной частоты соударений электронов в ионосфере Земли, на основе данных об ослаблении коротковолнового излучения при вертикальном зондировании ионосферы частотно-модулированным радиосигналом. Численное моделирование проведено на основе метода бихарактеристик Гамильтона-Лукина. Построены лучевые траектории ЛЧМ сигнала в координатах время-высота; исследованы зависимости вертикальной компоненты волнового вектора от высоты и времени; рассмотрены зависимости амплитуды сигнала от времени и высоты вдоль лучей. Получено приемлемое совпадение модельных значений эффективной частоты соударений и расчётных значений.

Исследование выполнялось в рамках гранта Российского научного фонда (проект № 20-12-00299).

Литература

1. Cedrik M., Podlesnyi A., Kurkin V. The Different Scale TIDs Diagnostics Based on Chirp-signals Amplitude Measurements Data in Vertical and Near-Vertical Ionosphere Sounding // 2020 7th All-Russian Microwave Conference (RMC), Moscow, Russia, 2020, P. 260-262, DOI: 10.1109/RMC50626.2020.9312341.
2. Podlesnyi A., Kurkin V., Cedrik M. Ionosond-MS ionosonde receiving antenna system // 2020 7th All-Russian Microwave Conference (RMC), Moscow, Russia, 2020, P. 263-265, DOI: 10.1109/RMC50626.2020.9312322.
3. Крюковский А.С., Куркин В.И., Ларюнин О.А., Лукин Д.С., Подлесный А.В., Растягаев Д.В., Черняк Я.М. Численное моделирование амплитудных карт для скорректированной модели

IRI-2012 с плавными возмущениями ионосферы // Радиотехника и электроника. 2016. Т. 61. № 8. С. 794-799.

4. Ryabova M.I., Ivanov D.V., Chernov A.A., Ovchinnikov V.V. Experimental Study of Phase-Frequency Responses of HF Radio Channels with the Use of SDR Ionosonde // 2020 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO), Svetlogorsk, Russia, 2020, P. 1-4, DOI: 10.1109/SYNCHROINFO49631.2020.9166094.

5. Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. М.: Мир, 1973. 502 с.

6. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Распространение частотно-модулированного излучения электромагнитных волн в ионосфере Земли с учетом поглощения и внешнего магнитного поля // Радиотехника и электроника. 2019. Т. 64. № 1. С. 3-14.

7. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере. // Космические исследования, 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 593–600.

8. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю. И. Математическое моделирование распространения частотно-модулированных радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника, 2015, Т. 60, № 10. С. 1001-1009.

9. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме. // Радиотехника и электроника, М.: Наука. 2012. Т.57. № 9. С. 1028-1034.

10. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Исследование распространения частотно-модулированных пространственно-временных сигналов в неоднородной анизотропной ионосфере // Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика» / М.: РосНОУ, 2013. Выпуск 4. – С. 47–52.

11. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Методы моделирования распространения электромагнитных волн в ионосфере с учетом распределений электронной концентрации и магнитного поля Земли // Радиотехника и электроника. 2014. Т. 59. № 12. С. 1180-1187.

12. Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Mikhaleva E.V., Popchenko O.V., Rastyagaev D.V. Diagnostics of the Effective Frequency of Electronic Collisions in the Ionosphere Based on Analysis of the Amplitude Characteristics of Continuous Linear Frequency Modulated Radio Signals // 2020 7th All-Russian Microwave Conference (RMC), IEEE, Moscow, Russia, 2020, P. 211-215. DOI: 10.1109/RMC50626.2020.9312352.

13. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Бова Ю.И. Моделирование поля в окрестности каустик обыкновенной и необыкновенной волн при ионосферном распространении // Радиотехника и электроника, 2020. Т. 65. № 12. С. 1160–1169. DOI: 10.31857/S0033849420120128