Проверка обобщенных уравнений Гельмгольца гиротропных волноводов с произвольной формой поперечного сечения

Д.Ш. Ширапов[1], Г.Б. Итигилов[1]

[1]Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления.
670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В.
E-mail: shir48@mail.ru

Проведена дополнительная проверка универсальных обобщенных уравнений Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании, позволяющих вывести общие уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при определенном (продольном, нормальном, касательном) намагничивании, из которых, в свою очередь, выводятся частные уравнений Гельмгольца для гиротропных волноводов с конкретной формой поперечного сечения при определенным (продольном, нормальном, касательном) намагничивании.
Ключевые слова: уравнения Гельмгольца, намагничивание, продольный, нормальный, касательный, гиротропный волновод

Verification of generalized Helmholtz equations for gyrotropic waveguides with arbitrary cross-section shape

D.Sh. Shirapov[1], G.B. Itigilov[1]
[1]East Siberian State University of Technology and Management.

A subsequent review of the universal generalized Helmholtz equations for gyrotropic waveguides with arbitrary orthogonal-curvilinear cross-sectional shape at an arbitrary magnetization, which allows to derive a General Helmholtz equation for gyrotropic waveguides with arbitrary orthogonal-curvilinear cross-sectional shape at a certain (longitudinal, normal, tangent) the magnetization of which, in turn, displays the private Helmholtz equations for gyrotropic waveguides with specific cross-sectional shape at a certain (longitudinal, normal, tangent) magnetization.
Keywords: Helmholtz equations, magnetization, longitudinal, normal, tangent, gyrotropic waveguide

Введение

В работах [1, 2] были получены обобщенные уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании. Обобщенные уравнения Гельмгольца позволяют вывести общие уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при продольном, нормальном и касательном намагничиваниях.

В [2] из обобщенных уравнений Гельмгольца были получены общие уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при продольном намагничивании, которые были использованы для частичного тестирования обобщенных уравнений. В то же время универсальность обобщенных уравнений Гельмгольца требует дополнительного тестирования.

Таким образом, целью этой работы является проведение дополнительного тестирования обобщенных уравнений Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании.

Проверка уравнений Гельмгольца

Схема тестирования:

- Вывод известных частных уравнений Гельмгольца для гиротропного *круглого* волновода при продольном намагничивании из аналогичных уравнений Гельмгольца для гиротропного *эллиптического* волновода при продольном намагничивании, полученных из обобщенных уравнений Гельмгольца [2], путем предельного изменения формы поперечного сечения волновода из эллипса в круг.
- Сравнение выведенных частных уравнений Гельмгольца для гиротропного круглого волновода при продольном намагничивании с известными аналогичными уравнениями из [3].

На рис.1 приведены семейства софокусных эллипсов и гипербол, образующих эллиптическую систему координат [4]. Семейства этих кривые пересекаются ортогонально и точки пересечения имеют координаты

$$\begin{cases} x = e \cdot ch\xi \cdot \cos\varphi \\ y = e \cdot sh\xi \cdot \sin\varphi. \end{cases} \tag{1}$$

Например, точка М на рис.1 имеет координаты

$$\begin{cases} x = e \cdot ch0{,}78 \cdot \cos 60^0 \\ y = e \cdot sh0{,}78 \cdot \sin 60^0. \end{cases} \tag{2}$$

Угол φ принимает значения от 0 до 2π. Если имеется натянутая упругая мембрана, закрепленная между двумя подобными эллипсами, то угол ξ изменяется между значениями, соответствующими этим эллипсам.

Из [4] следует, что если значение большой полуоси s постоянно и эксцентриситет $E \to 0$, то значение угла $\xi \to \infty$ и эллипс стремится к окружности с радиусом $r=s$.

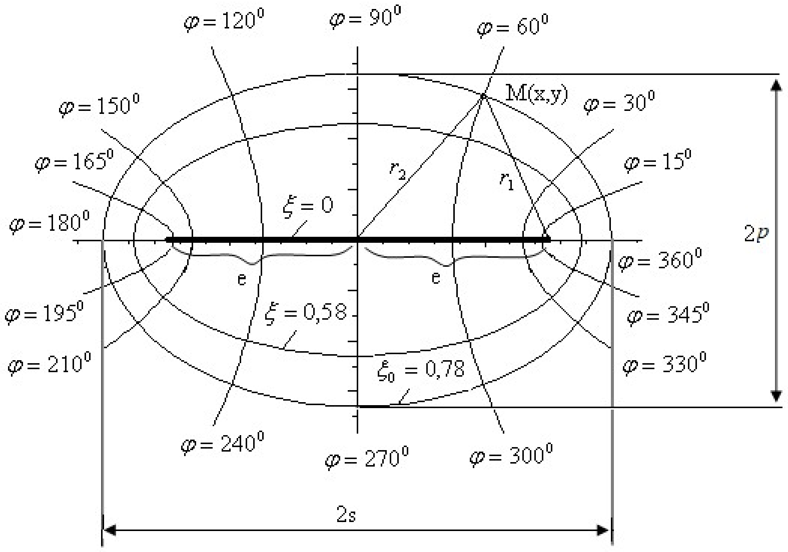

Рис.1. Семейства ортогональных софокусных эллипсов и гипербол: *e* –фокусное расстояние; *E* – эксцентриситет; *s*, *p* – большая и малая полуоси внешнего эллипса

Для вывода уравнений Гельмгольца для гиротропного круглого волновода при продольном намагничивании из аналогичных уравнений Гельмгольца для гиротропного эллиптического волновода путем предельного изменения формы поперечного сечения из эллипса в круг обратимся к [4].

На рис.2 приведены дифференциалы дуг эллипса и гиперболы. Согласно [4] дифференциалы дуг эллипса и гиперболы определяются

$$\begin{cases} ds_1 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}\, d\xi \\ ds_2 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}\, d\varphi \end{cases} \tag{3}$$

Частные производные, входящие в (3), равны [4]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} = e \cdot sh\xi \cdot \cos\varphi \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = -e \cdot ch\xi \cdot \sin\varphi \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} = e \cdot ch\xi \cdot \sin\varphi \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = e \cdot sh\xi \cdot \cos\varphi \end{cases} \tag{4}$$

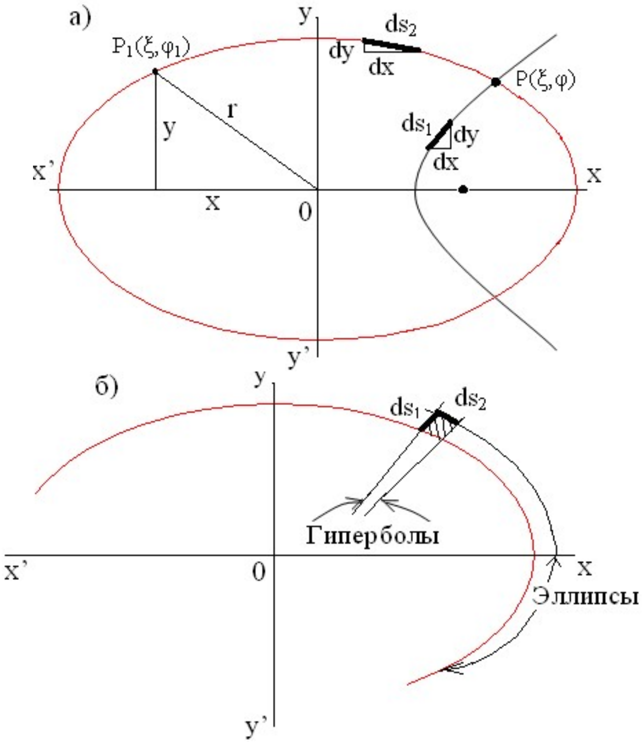

Рис. 2. Дифференциалы дуг эллипса и гиперболы: а) гиперболический ds_1 и эллиптический ds_2 дифференциалы дуги и радиус-вектор r; б) – площадь [ds_1xds_2], заключенная между двумя смежными парами пересекающихся софокусных эллипсов и гипербол [4]

Тогда с учетом (4) выражение (3) принимает вид

$$\begin{cases} ds_1 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}\, d\xi = e\sqrt{ch^2\xi - \cos^2\varphi}\ d\xi \\ ds_2 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}\, d\varphi = e\sqrt{ch^2\xi - \cos^2\varphi}\ d\varphi \end{cases}$$

где

$$l_1 = e \cdot \sqrt{ch^2\xi - \cos^2\varphi} \qquad (5)$$

Поэтому

$$\begin{cases} ds_1 = l_1\, d\xi \\ ds_2 = l_1\, d\varphi \end{cases}$$

Так как дифференцирование ds_1 направлено по нормали к эллипсу, то

$$dn = l_1 d\xi .$$

Из рис.2а следует, что расстояние до любой точки (*x, y*) от начала координат в эллиптической системе координат будет

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = e \cdot \sqrt{ch^2\xi - \sin^2\varphi}, \text{ где } r - \text{радиус-вектор.} \qquad (6)$$

Тогда, согласно [4], при *e=const* и $\xi \to \infty$ из (5) и (6) следует, что

$$l_1 \approx r \approx e\cdot ch(\xi) = \frac{e}{2}\left[\exp(\xi) + \exp(-\xi)\right] = \frac{e}{2}\exp(\xi). \qquad (7)$$

Согласно [4] $\begin{cases} ds_1 = r \cdot d\xi \approx dr \\ ds_2 \approx r \cdot d\varphi \\ ds_1 \cdot ds_2 = r \cdot d\varphi \cdot dr \end{cases}$

Откуда

$$d\xi = \frac{dr}{r} \qquad (8)$$

Уравнения Гельмгольца для гиротропного эллиптического волновода при продольном намагничивании для гибридных *EH* и *HE* волн следующие [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_Z}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2\left(\omega^2 \varepsilon \mu_\perp - \gamma^2\right)E_Z - je^2\left(ch^2\xi - \cos^2\varphi\right)\gamma k\omega \dfrac{\mu_\parallel}{\mu} H_Z = 0; \\ \dfrac{\partial^2 H_Z}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 H_Z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2\left(\omega^2 \varepsilon \mu_\parallel - \dfrac{\mu_\parallel}{\mu}\gamma^2\right)H_Z + je^2\left(ch^2\xi - \cos^2\varphi\right)\gamma\omega\varepsilon \dfrac{k}{\mu} E_Z = 0 \end{cases}. \qquad (9)$$

где $\left(ch^2\xi - \cos^2\varphi\right) = d^2$; j – мнимая единица; ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость феррита; ω – циклическая частота; E_Z, H_Z – продольные компоненты электрического и магнитного полей; $\mu = \mu_0 - \mu_0 \dfrac{\omega_0 \omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; $\omega_0 = \mu_0 \Upsilon H_0$ – частота ферромагнитного резонанса; $\Upsilon = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг – гиромагнитное отношение; H_0 – напряженность намагничающего постоянного магнитного поля; $\omega_m = \mu_0 \Upsilon M_0$; M_0– намагниченность насыщения феррита; $k = \mu_0 \dfrac{\omega\omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2}$, γ – постоянная распространения; $\mu_\perp = \dfrac{\mu^2 - k^2}{\mu}$; $\mu_\parallel \approx \mu_0$.

Так как из [4] следует, что при $\xi \to \infty$ $ch^2(\xi) - \cos^2(\varphi) \approx ch^2(\xi)$ и $ed \approx e\cdot ch(\xi) \approx r$. Тогда первое уравнение для *EH*- волны из (9) примет вид

$$\frac{\partial^2 E_Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + r^2\left(\omega^2 \varepsilon \mu_\perp - \gamma^2\right)E_Z - jr^2\gamma k\omega \frac{\mu_\parallel}{\mu} H_Z = 0, \qquad (10)$$

где r - радиус окружности.

Далее, с учетом (8), преобразуем формулу (10)

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial E_Z}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial^2 E_Z}{\partial\varphi^2}+\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp-\gamma^2\right)r^2E_z-jr^2\gamma k\omega\frac{\mu_\parallel}{\mu}H_Z=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\frac{r}{\partial r}\partial\left(r\frac{\partial E_Z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 E_Z}{\partial\varphi^2}+\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp-\gamma^2\right)r^2E_z-jr^2\gamma k\omega\frac{\mu_\parallel}{\mu}H_Z=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\frac{r}{\partial r}\left(\frac{\partial r\partial E_Z}{\partial r}+\frac{r\partial^2 E_Z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 E_Z}{\partial\varphi^2}+\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp-\gamma^2\right)r^2E_z-jr^2\gamma k\omega\frac{\mu_\parallel}{\mu}H_Z=0.$$

Деля последнее выражение на r^2 имеем

$$\frac{\partial^2 E_Z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_Z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial\varphi^2}+\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp-\gamma^2\right)E_z-j\gamma k\omega\frac{\mu_\parallel}{\mu}H_Z=0. \qquad (11)$$

Поступая, таким же образом со вторым уравнением (9) для *HE*- волны получим

$$\frac{\partial^2 H_Z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_Z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial\varphi^2}+\left(\omega^2\varepsilon\mu_\parallel-\frac{\mu_\parallel}{\mu}\gamma^2\right)H_Z+j\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu}E_Z=0. \qquad (12)$$

Формулы (11) и (12), полученные из (9) путем предельного изменения формы поперечного сечения гиротропного эллиптического волновода из эллипса в круг, описывают распространение гибридных *EH*- и *HE*- волн в круглом гиротропном волноводе при продольном намагничивании и совпадают с аналогичными из [3], за исключением знаков перед последними слагаемыми (перед H_Z в (11) и E_Z в (12)). Отметим, что это несовпадение связано с тем, что в [2] недиагональные компоненты тензора магнитной проницаемости феррита при продольном намагничивании взяты с противоположными знаками, чем в [3], что несущественно и только меняет местами левое и правое вращение электромагнитных волн при распространении их в гиротропных волноводах с продольным намагничиванием.

Заключение

В работе [2] в результате последовательных вычислений «*Обобщенные уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании*», «*Общие уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при продольном намагничивании*» были получены «*Частные уравнения Гельмгольца для гиротропных эллиптических волноводов при продольном намагничивании*».

В данной работе, преобразуя, частные уравнения Гельмгольца для гиротропных эллиптических волноводов при продольном намагничивании, в соответствующие уравнения Гельмгольца для гиротропных круглых волноводов путем предельного преобразования поперечного сечения – эллипса в круг была проведена проверка обобщенных уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании.

Тестирование показало правильность обобщенных уравнений Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании [1, 2], как для *HE*- волны

$$\Delta_{11}H_z+\Delta_{22}H_z+j\gamma\left(\delta_1H_1+\delta_2H_2\right)-j\omega^2\varepsilon\left(lH_1+mH_2\right)+\omega^2\varepsilon\mu_{33}H_z=0, \qquad (13)$$

так и для *EH*- волны

$$\begin{aligned}&\mu_{11}\Delta_{11}E_z+\mu_{22}\Delta_{22}E_z+j\gamma\left(\mu_{11}\delta_1E_1+\mu_{22}\delta_2E_2\right)+\omega\left(\mu_{11}m\delta_1-\mu_{22}l\delta_2\right)H_z+\\&+\gamma k\omega\left(-lH_1-mH_2-j\mu_{33}H_z\right)-\omega^2\varepsilon\left(k^2-\mu_{11}\mu_{22}\right)E_z+j\omega\left(lk\delta_1+mk\delta_2\right).H_z=0.\end{aligned} \qquad (14)$$

Вывод

Показано, что полученные в [1, 2] универсальные обобщенные уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольной ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании (13) и (14), позволяющие вывести любые частные уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с конкретной ортогональной формой поперечного сечения при требуемом намагничивании, корректны.

Литература

1. Ширапов Д.Ш., Итигилов Г.Б. Обобщенные уравнения Гельмгольца гиротропных волноводов при произвольном намагничивании // Материалы 73-й Международной конференции «Радиоэлектронные устройства и системы для инфокоммуникационных технологий (РЭУС-2018)». Москва. 30 мая – 1 июня 2018 г. С. 38-43.
2. Ширапов Д.Ш., Итигилов Г.Б. Обобщенные уравнения Гельмгольца гиротропных волноводов произвольной формы поперечного сечения // Материалы II Всероссийской научной конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн», г. Муром. 26-28 июня 2018 г. С. 209-219.
3. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах.- Л.: Госэнергоиздат, 1963.- 664 с.
4. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложение функций Матье. Пер. с англ. В.А. Братановского // М.: Изд. иностранной литературы, 1953.- 475 с.