

Модель распространения декаметровых радиоволн на основе метода нормальных волн

М.С. Пензин¹, Н.В. Ильин¹, С.Н. Пономарчук¹

¹Институт солнечно-земной физики СО РАН
664033, г. Иркутск, ул.Лермонтова, 126А.

E-mail: penzin@iszf.irk.ru, ilyin@iszf.irk.ru, spn@iszf.irk.ru

В докладе в рамках волноводного подхода приведен метод описания распространения КВ радиоволн в волноводе Земля – ионосфера. С целью снятия ограничения по частоте снизу, был модифицирован метод решения радиальной задачи и построения спектра радиального оператора. Разработан численный алгоритм расчета поля радиоволны для любых частот, для которых существует регулярный волновод Земля–ионосфера и число нормальных волн достаточно велико.

Ключевые слова: распространение КВ радиоволн, волноводный подход, волновод Земля - ионосфера

The model of HF radio wave propagation on the base of waveguide approach

M.S. Penzin¹, N.V. Ilyin¹, S.N. Ponomarchuk¹

¹Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS.

In framework of waveguide approach we propose the description technique for HF radio wave propagation in Earth-ionosphere waveguide. In order to remove restrictions for low limit of frequency we modified the technique of radial problem solution and radial operator spectrum construction. The developed numerical algorithm allows us to calculate field for any frequencies if we have regular Earth-ionosphere waveguide and the number of normal waves is sufficiently large.

Keywords: HF radio wave propagation, waveguide approach, Earth-ionosphere waveguide

Введение

Одним из эффективных методов анализа КВ радиотрасс является волноводный подход - метод нормальных волн [1]. В рамках волноводного подхода электромагнитное поле излучения внутри волновода Земля–ионосфера представляется в виде разложения по собственным функциям радиального оператора. При этом для численных расчетов, ряд ограничивается так называемой группой слабозатухающих нормальных волн. Если несущая частота сигнала больше минимальной критической частоты на трассе распространения, тогда в каждой точке волновода существует номер нормальной волны, после которого поле перестает отражаться от ионосферы. В случае если частота меньше критических частот по трассе, группа слабо просачивающихся волн становится бесконечной. При этом реальные части спектрального параметра образуют последовательность, сходящуюся к нулю, что физически соответствует наличию углов излучения, сколь угодно близких к вертикали к земной поверхности. Мнимые части спектрального параметра растут с номерами, но обусловлено это не прохождением волн сквозь ионосферный барьер, а поглощением в ионосфере. В докладе приведен метод описания распространения декаметровых радиоволн на основе модификации волноводного подхода. Для коэффициентов разложения в ряде нормальных волн получены решения без учета взаимодействия волн в неоднородном волноводе. Предложена схема решения радиальной задачи и построения спектра

радиального оператора для рабочих частот нижней части декаметрового диапазона, для которых существует регулярный волновод Земля–ионосфера и число нормальных волн достаточно велико.

Постановка задачи

Рассматривается изотропный азимутально-симметричный неоднородный сферический волновод Земля – ионосфера. Волновод образован земной поверхностью $r = a$ и ионосферой $r \geq r_H$, где a – радиус Земли, r_H – высота начала ионосферы. Излучатель с распределением плотности тока $\vec{j}(r, \theta)$ расположен над земной поверхностью ниже ионосферного слоя. Используется сферическая система координат (r, θ, φ) с полярной осью, проходящей через излучающую систему. Для Фурье – компонент электромагнитного поля с гармонической зависимостью от времени $\exp(-i\omega t)$ уравнения Максвелла можно записать в виде:

$$\text{rot}\vec{B} = -ik\hat{\varepsilon}\vec{E} + \frac{4\pi}{\omega}\vec{j}, \quad \text{rot}\vec{E} = ik\vec{B}. \quad (1)$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость ионосферы $\hat{\varepsilon}$ в приближении «холодной» плазмы имеет вид [2]:

$$\hat{\varepsilon}(r, \theta, \omega) = \varepsilon(r, \theta, \omega) + i\varepsilon''(r, \theta, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N(r, \theta)}{m\omega[\omega + iv_{\text{eff}}(r, \theta)]}. \quad (2)$$

Внутри Земли $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_t = \varepsilon_t + i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_t$; в области $a < r < r_H$, $\hat{\varepsilon} = 1$; на бесконечности $\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{\varepsilon} = 1$. Граничные условия на поверхности $r = a$ для компонент поля \vec{E}, \vec{B} имеют вид:

$$\vec{B}_t = \vec{B}, \quad E_{t\varphi} = E_\varphi, \quad E_{t\theta} = E_\theta, \quad \hat{\varepsilon}_t E_{tr} = E_r. \quad (3)$$

Индекс “ t ” в выражении (3) относится к полю внутри Земли. На бесконечности поля должны удовлетворять условию излучения:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial(r\vec{E})}{\partial r} - ik\vec{E} \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial(r\vec{B})}{\partial r} - ik\vec{B} \right) = 0. \quad (4)$$

Вследствие симметрии задачи относительно поворотов вокруг полярной оси система уравнений (1) распадается на две группы уравнений: 1) E_r, E_θ, B_φ образуют ТМ – поле; 2) B_r, B_θ, E_φ образуют ТЕ – поле. При этом компоненты E_r, E_θ выражаются через B_φ , а компоненты B_r, B_θ через E_φ . Условия сшивки для E_φ, B_φ на поверхности $r = a$ имеют вид:

$$E_{t\varphi} = E_\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial r}(rE_{t\varphi}) = \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi), \quad B_{t\varphi} = B_\varphi, \quad \frac{1}{\hat{\varepsilon}_t} \frac{\partial}{\partial r}(rB_{t\varphi}) = \frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi). \quad (5)$$

Общее уравнение для определения компонент E_φ, B_φ после перехода к новой переменной $x = -\cos\theta$ и новым функциям $\tilde{E} = rE_\varphi\sqrt{1-x^2}$ и $\tilde{B} = rB_\varphi\sqrt{1-x^2}/\sqrt{\hat{\varepsilon}}$ можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \tilde{k}^2(r, x)\Pi + \frac{1-x^2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - \xi(r, x)\Pi \right) = \sqrt{1-x^2} \tilde{I}(r, x). \quad (6)$$

При $\Pi = \tilde{E}$:

$$\tilde{k}^2 = k^2 \hat{\varepsilon}, \quad \xi = 0, \quad \tilde{I} = -ikr \frac{4\pi}{c} j_\varphi.$$

При $\Pi = \tilde{B}$:

$$\tilde{k}^2 = k^2 \hat{\varepsilon} - \sqrt{\hat{\varepsilon}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\varepsilon}}} \right), \quad \xi = \sqrt{\hat{\varepsilon}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\varepsilon}}} \right), \quad \tilde{I} = -ikr \frac{4\pi}{c} \text{rot}_\varphi \frac{j}{\hat{\varepsilon}}.$$

Условия (5) примут вид:

$$\tilde{E}_t = \tilde{E}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \tilde{E}_t = \frac{\partial}{\partial r} \tilde{E}, \quad \sqrt{\hat{\varepsilon}_t} \tilde{B}_t = \tilde{B}, \quad \frac{1}{\hat{\varepsilon}_t} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{\hat{\varepsilon}_t} \tilde{B}_t) = \frac{\partial}{\partial r} \tilde{B}. \quad (7)$$

На бесконечности функция Π удовлетворяет условию излучения:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r} - ik \Pi \right) = 0. \quad (8)$$

Разделение переменных

Решения краевых задач (6)-(8) для \tilde{E} и \tilde{B} , при каждом значении x , будем формально представлять в виде разложения по собственным функциям радиальных краевых задач для ТМ и ТЕ - полей, сформулированных в [1] для случая сферически-симметричного волновода. Радиальное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \left(\tilde{k}^2(r, x) - \frac{\mathcal{G}_n^2(x)}{r^2} \right) R_n = 0. \quad (9)$$

Здесь \mathcal{G}_n^2 - комплексное собственное значение радиальной задачи. Граничные условия для собственных функций R_n на поверхности $r = a$ и на бесконечности аналогичны (7) и (8) если вместо \tilde{E} и \tilde{B} подставить R_n . Для дискретной части спектра краевой задачи радиальные функции допускают нормировку [1]:

$$\int_0^\infty \frac{R_n R_m}{r^2} dr = \frac{\delta_{nm}}{a}. \quad (10)$$

Условие (10) позволяет заключить, что функции R_n при $r \rightarrow 0$ удовлетворяют соотношению:

$$\lim_{r \rightarrow 0} R_n / \sqrt{r} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, решение уравнения (6) будем искать в виде ряда:

$$\Pi(r, x) = \sum_n X_n(x) R_n(r, x). \quad (12)$$

Подставим (12) в (6), умножим на R_m и проинтегрируем по r . В результате получим

$$X_m'' + \left(\frac{\mathcal{G}_m^2}{1-x^2} - \xi \right) X_m + a \sum_n \left[2X_n' \left(R_m, \frac{\partial R_n}{\partial x} \right) + X_n \left(R_m, \frac{\partial^2 R_n}{\partial x^2} \right) \right] = \frac{I_m}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (13)$$

где введены обозначения

$$I_m(x) = a \int_0^\infty \tilde{I} R_m dr, \quad (R_n, f) = \int_0^\infty f R_n dr.$$

В случае плавных изменений параметров ионосферы вдоль координаты x можно пренебречь взаимодействием волн и величинами ξ и $\sqrt{\hat{\varepsilon}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\varepsilon}}} \right)$ в \tilde{k}^2 [3]. Тогда,

введя обозначения $\mathcal{G}_n^2 = (ka)^2 \tilde{\gamma}_n^2 = h^2 \tilde{\gamma}_n^2$, уравнение (13) можно записать в виде:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + h^2 q(x) X_n = \frac{I_n}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (14)$$

где $q(x) = \frac{\tilde{\gamma}_n^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Наличие большого параметра $h = ka \ll 10^6$ позволяет при его решении использовать асимптотические методы. Коэффициент $q(x)$ имеет две особые точки при $x = \pm 1$. Построение асимптотического решения проводится следующим образом. Первоначально ищутся асимптотические представления для X_n в областях $x \in (-1, 1-\delta)$ и $x \in (-1+\delta, 1)$, $\delta > 0$. Сшивая эти решения внутри области перекрытия $(-1+\delta, 1-\delta)$, получаем решение уравнения (14). Решение в каждой из составляющих областей можно найти методом эталонного уравнения [4]. Перейдем к новой переменной $x = x(\eta)$ и введем новую функцию $\Psi_n = X_n / \sqrt{x'}$. Уравнение (14) примет вид:

$$\Psi_n'' + h^2 q(x) (x')^2 \Psi_n = \left[\frac{3}{4} \left(\frac{x''}{x'} \right) - \frac{1}{2} \frac{x'''}{x'} \right] \Psi_n + \frac{(x')^{3/2}}{\sqrt{1-x^2}} I_n. \quad (15)$$

Пренебрегая производной Шварца, данное уравнение можно свести к эталонному уравнению, полагая

$$\eta(x) = -\cos \left(\frac{1}{\Gamma_n} \int_{-1}^x \frac{\tilde{\gamma}_n(\tilde{x})}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} d\tilde{x} \right), \quad \Gamma_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\gamma}_n(\tilde{x})}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} d\tilde{x}. \quad (16)$$

Функция η принимает значения -1 и 1 при $x = -1$ и $x = 1$ соответственно. В результате преобразования получим уравнение:

$$\Psi_n'' + \frac{h^2 \Gamma_n^2}{1-\eta^2} \Psi_n = I_n \frac{\Gamma_n^{3/2} (1-x^2)^{1/4}}{\tilde{\gamma}_n^{3/2} (1-\eta^2)^{3/4}}. \quad (17)$$

Если сделать замену $\Psi_n = Z_n \sqrt{1-\eta^2}$, то получим уравнение Лежандра:

$$(1-\eta^2) Z_n'' - 2\eta Z_n' + \left(h^2 \Gamma_n^2 - \frac{1}{1-\eta^2} \right) Z_n = I_n \frac{\Gamma_n^{3/2} (1-x^2)^{1/4}}{\tilde{\gamma}_n^{3/2} (1-\eta^2)^{1/4}}. \quad (18)$$

Решением однородного уравнения Лежандра является линейная комбинация присоединенных функций Лежандра $P_{\mu_n}^1(\eta)$:

$$Z_n(\eta) = C_{1n} P_{\mu_n}^1(\eta) + C_{2n} P_{\mu_n}^1(-\eta), \quad (19)$$

где $h^2 \Gamma_n^2 = \mu_n(\mu_n + 1)$. Решение неоднородного уравнения (18) ищем методом вариации постоянных, используя условия ограниченности решений в точках $\eta = \pm 1$. Общее решение (18) можно записать в виде:

$$Z_n(\eta) = -P_{\mu_n}^1(\eta) \int_{-1}^{\eta} \frac{J_n(\tilde{\eta}) P_{\mu_n}^1(-\tilde{\eta})}{(1-\tilde{\eta}^2) \Delta_n} d\tilde{\eta} - P_{\mu_n}^1(-\eta) \int_{\eta}^1 \frac{J_n(\tilde{\eta}) P_{\mu_n}^1(\tilde{\eta})}{(1-\tilde{\eta}^2) \Delta_n} d\tilde{\eta}. \quad (20)$$

Здесь $J_n = I_n \frac{\Gamma_n^{3/2} (1-x^2)^{1/4}}{\tilde{\gamma}_n^{3/2} (1-\eta^2)^{1/4}}$, $\Delta_n = W[P_{\mu_n}^1(\eta), P_{\mu_n}^1(-\eta)] = \frac{2}{\pi} \sin(\pi \mu_n) \frac{\mu_n(\mu_n + 1)}{1-\eta^2}$.

Вронскиан функций Лежандра. Так как распределение тока по углу ограничено: $I_n(x) = 0$, при $x > x_0$, поэтому остается только первое слагаемое в выражении (20)

$$Z_n(\eta) = -P_{\mu_n}^1(\eta) \int_{-1}^{\eta_0} \frac{J_n(\tilde{\eta}) P_{\mu_n}^1(-\tilde{\eta})}{(1-\tilde{\eta}^2) A_n} d\tilde{\eta}, \quad (21)$$

где $\eta_0 = \eta(x_0)$. В итоге выражение для $X_n(x)$ имеет вид:

$$X_n(x) = -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\Gamma_n}{\tilde{\gamma}_n(x)}} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\eta^2} \frac{P_{\mu_n}^1(\eta)}{\mu_n(\mu_n+1) \sin \pi \mu_{n-1}} \int_{-1}^{\eta_0} J_n(\tilde{\eta}) P_{\mu_n}^1(-\tilde{\eta}) d\tilde{\eta}. \quad (22)$$

Запишем асимптотические выражения $X_n(\theta)$ вне областей излучателя и антиподной точки на примере вертикального электрического диполя с распределением плотности тока:

$$j_r(r, \theta) = -\frac{i\omega}{2\pi} \frac{p_0}{r^2 \sin \theta} \delta(r-b) \delta(\theta), \quad (23)$$

где p_0 - полный дипольный момент, b - радиальная координата расположения излучателя. Если выполняются условия $|\mu_n| \ll 1, \mu_n \approx h\Gamma_n$, то выражение для $X_n(\theta)$ совпадает с выражением, записанном в работе [1] в адиабатическом приближении:

$$X_n(\theta) = -\sqrt{2\pi h} \frac{hp_0 e^{i\pi/4}}{b^2 \sqrt{\varepsilon(b,0)}} \frac{\tilde{\gamma}_n(0)}{\sqrt{\tilde{\gamma}_n(\theta)}} \sqrt{\sin \theta} R_n(b,0) e^{ih \int_0^\theta \tilde{\gamma}_n(\theta') d\theta'}. \quad (24)$$

Аналогично, для точечного вертикального магнитного диполя с распределением плотности тока

$$j_\varphi(r, \theta) = -\frac{m_0 c}{\pi r b^2 (1 - \cos^2 \theta_0)} \delta(r-b) \delta(\theta - \theta_0), \quad (25)$$

где m_0 - полный магнитный момент, θ_0 - угловой радиус рамки, можно записать выражение для $X_n(\theta)$ в виде:

$$X_n(\theta) = -\sqrt{2\pi h} \frac{hm_0 e^{i\pi/4}}{b^2} \frac{\tilde{\gamma}_n(0)}{\sqrt{\tilde{\gamma}_n(\theta)}} \sqrt{\sin \theta} R_n(b,0) e^{ih \int_0^\theta \tilde{\gamma}_n(\theta') d\theta'}. \quad (26)$$

Радиальная краевая задача

Для практического применения метода нормальных волн для исследования КВ радиотрасс поле внутри волновода Земля-ионосфера представляется в виде ряда по собственным функциям радиальной краевой задачи с импедансными условиями на земной поверхности и условиями излучения на бесконечности [1]. Радиальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2 R}{dy^2} + hQ(y, \xi + i\chi) R = 0, \quad (27)$$

где $Q = 1 - \alpha q_1(y) + i\beta q_2(y) - \frac{\xi + i\chi}{y^2}$, $\xi + i\chi = \tilde{\gamma}^2 = (\gamma + i\nu)^2$, $y = r/a$, $\alpha = \omega_0^2 / \omega^2$,

$\beta = \alpha v_{eff} / \omega^2$, $q_1(y) = q(y)$, $q_2(y) = q(y) \tilde{q}(y)$, $q(y)$ - профиль электронной концентрации $N(y)$, нормированный на единицу в точке максимума, $\tilde{q}(y)$ - профиль эффективной частоты соударений с нейтралами v_{eff} , нормированный на единицу в точке начала ионосферы. Здесь и далее у собственных функций и собственных значений подразумевается наличие индекса n . Граничное условие для радиальной функции на поверхности Земли:

$$\left[\frac{dR}{dy} + ihS\sqrt{\varepsilon_t - \xi - i\chi}R \right]_{y=1} = 0, \quad (28)$$

где $S = 1$ для магнитного диполя $S = 1/\varepsilon_t$ для электрического диполя, ε_t - комплексная диэлектрическая проницаемость земной поверхности. Условие излучения на бесконечности:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{dR}{dy} - ihR \right) = 0 \quad (29)$$

Решения точной радиальной задачи (9) удовлетворяют условию нормировки (10) для функций R_n . Собственные функции R_n радиальной задачи (27) - (29) с импедансными граничными условиями на поверхности Земли таким свойством не обладает. Далее, для нахождения нормировочных констант в собственных функциях радиальной задачи будем использовать приближенное условие [1]:

$$\int_1^{\infty} \frac{R_n^2(y)}{y^2} dy \approx 1. \quad (30)$$

Вещественную независимую переменную y в коэффициенте уравнения (27) можно заменить комплексной переменной z . Нули функции $Q(z, \xi + i\chi)$, $z_1 = y_1 + i\psi_1$ и $z_2 = y_2 + i\psi_2$, определяют точки отражения (поворота). В зависимости от значения спектрального параметра нижней точкой отражения является поверхность Земли или точка $z_1 = \sqrt{\xi + i\chi} = \gamma + i\nu$. В окрестности верхней точки отражения z_2 меняет знак $\text{Re} Q(z, \xi + i\chi)$, поэтому из условия $\text{Re} Q(z, \xi + i\chi) = 0$ можно приближенно записать выражение на вещественную часть $\xi = \gamma^2 - \nu^2$:

$$\xi = y^2 [1 - \alpha^2 q_1(y)]. \quad (31)$$

В реализованном ранее комплексном алгоритме моделирования декаметрового радиоканала на основе метода нормальных волн [1] предполагалось, что рабочая частота больше минимальной критической частоты F2 – слоя на радиотрассе. Данное предположение соответствует условию существования идеального волновода Земля – ионосфера. Коэффициент в радиальном уравнении (27) в таком волноводе больше нуля, $Q(y, \gamma) > 0$ вне точек поворота $Q(y, \gamma) = 0$. При учете мнимой части спектрального параметра ν ограничение снизу на рабочую частоту по критической частоте слоя F2 снимается, так как решение уравнения (27) для таких частот существует.

Собственные значения $\tilde{\gamma}^2 = \xi + i\chi$ радиальной задачи (27)-(29) в комплексной плоскости (ξ, χ) расположены в верхней полуплоскости, так как $\xi = \gamma^2 - \nu^2$, $\chi = 2\gamma\nu$. В комплексной же плоскости (γ, ν) значения спектрального параметра $\gamma + i\nu = \sqrt{\xi + i\chi}$ расположены в верхнем правом квадранте. В области рабочих частот, меньших критической частоты слоя F2, вещественная часть спектрального параметра γ стремится к нулю, а мнимая часть ν резко возрастает. При этом для определенной части спектра собственных значений для рабочих частот низкочастотной части декаметрового и средневолнового диапазона существует регулярный волновод Земля–ионосфера и число нормальных волн достаточно велико. Таким образом, в предлагаемой модели распространения радиоволн ограничение на рабочую частоту по критической частоте слоя F2 снимается и вклад мнимой части собственного значения в характеристики нормальных волн учитывается по квадрату спектрального параметра радиальной задачи.

Решение радиальной задачи

Так как в уравнении (27) параметр $h = ka \sim 10^6$, то решение радиального уравнения вне окрестностей точек поворота z_1, z_2 записывается в виде ВКБ – приближения [1,5]:

$$R = \frac{C^\pm}{\sqrt[4]{Q}} \exp\left(\pm ih \int_{z_1}^z \sqrt{Q} dz\right), \quad (32)$$

C^\pm - произвольные константы. В области точек поворота z_1, z_2 решение уравнения (27) строится, используя эталонное уравнение Эйри [1,4]. Решение радиальной краевой задачи вблизи поверхности Земли в окрестности точки $z_1 = \tilde{\gamma} = \gamma + i\nu$ выражается в виде линейной комбинации функций Эйри $u(x)$ и $v(x)$ с учетом импедансных граничных условий (28). Используя асимптотики функций Эйри $u(x)$ и $v(x)$, решение радиальной задачи вблизи поверхности Земли может быть преобразовано к виду ВКБ – решения уравнения (27):

$$R = \frac{C_1}{Q^{1/4}} \cos\left(h \int_{z_1}^y \sqrt{Q} dy + \Phi\right). \quad (33)$$

В формуле (33) $z_1 = 1$ при $\gamma < 1$ и $z_1 = \tilde{\gamma}$ при $\gamma > 1$. Нормальные волны, отвечающие значениям $\gamma < 1$, описывают распространение электромагнитного поля в наземном волноводе, а волны $\gamma > 1$ - в надземном волноводе [1].

Для точки поворота в ионосфере решение (27) ищем, используя эталонное уравнение Эйри, и выбирая только убывающее решение "вглубь ионосферы" [1]. Асимптотика решения в волноводе имеет вид:

$$R = \frac{C_2}{Q^{1/4}} \sin\left(h \int_y^{z_2} \sqrt{Q} dy + \frac{\pi}{4}\right). \quad (34)$$

Из условия совпадения решений (33) и (34) внутри волновода, получаем уравнение на спектр собственных значений радиальной задачи и связь между константами C_1 и C_2 :

$$h \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{Q(y + i\psi, \xi + i\chi, \beta)} dz + \Phi(\xi + i\chi) = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad (35)$$

$$(-1)^n C_1 = C_2. \quad (36)$$

Решение уравнения на спектр

В окрестности точек отражения можно считать, что $Q(z) \approx Q'_z(z_{1,2})(z - z_{1,2})$. Тогда, если учесть, что для нижней точки отражения $Q'_z(z_1) = 2/z_1$, интеграл в окрестности нижней точки поворота можно записать в виде:

$$\int_{y_1 + i\psi_1}^{y_1} \sqrt{Q} dz \approx \frac{2}{3} \sqrt{Q'_z(z_1)} (z - z_1)^{3/2} \Big|_{z_1}^{y_1} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{z_1}} (-i\psi_1)^{3/2}. \quad (37)$$

Для верхней точки отражения получим выражение:

$$\int_{y_2}^{z_2} \sqrt{Q} dz \approx -\frac{2}{3} \sqrt{-Q'_z(z_2)} (z_2 - z)^{3/2} \Big|_{y_2}^{z_2} = \frac{2}{3} \sqrt{-Q'_z(z_2)} (i\psi_2)^{3/2}. \quad (38)$$

Так как $\psi \approx \nu$, то при малом значении ν можно пренебречь вкладом мнимых частей точек отражения. Разложим \sqrt{Q} и Φ по малым величинам $\beta q_2(y)$ и χ , пренебрегая малыми величинами второго порядка.

$$\sqrt{Q(y, \xi + ix, \beta)} \approx \sqrt{Q(y, \xi)} - \frac{i\chi}{2y^2 \sqrt{Q(y)}} + \frac{i\beta q_2(y)}{2\sqrt{Q(y)}}, \quad (39)$$

$$\Phi(\xi + i\chi) \approx \Phi(\xi) + i\Phi'_\xi \chi.$$

Отсюда получим уравнения на реальную и мнимую часть спектра:

$$h \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{Q(y, \xi)} dy + \text{Re } \Phi(y) - \text{Im } \Phi'_\xi(\xi) \chi = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad (40)$$

$$h \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{i\beta q_2(y)}{2\sqrt{Q(y, \xi)}} - \frac{i\chi}{2y^2 \sqrt{Q(y, \xi)}} \right) dy + \text{Im } \Phi(\xi) + \text{Re } \Phi'_\xi(\xi) \chi = 0.$$

В первом уравнении мнимой частью производной фазы можно пренебречь по сравнению с интегралом. В итоге получим:

$$h \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{Q(y, \xi)} dy + \text{Re } \Phi(\xi) = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad (41)$$

$$\chi = \frac{h \int_{y_1}^{y_2} \frac{\beta q_2(y)}{2\sqrt{Q(y, \xi)}} dy + \text{Im } \Phi(\xi)}{h \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{2y^2 \sqrt{Q(y, \xi)}} dy - \text{Re } \Phi'_\xi(\xi)}. \quad (42)$$

Значение константы C_1 находится из условия ортогональности радиальных функций (30) и равно [1]:

$$C_1 = \left(\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{2y^2 \sqrt{Q(y, \xi)}} dy \right)^{-1/2}. \quad (43)$$

Компоненты поля

В заключение выпишем выражения для компонент электромагнитного поля в рамках метода нормальных волн. Компоненты ТМ – поля имеют вид:

$$B_\varphi(r, \theta) = \frac{A^e}{\sqrt{\sin \theta}} \sum_n \frac{\tilde{\gamma}_n(0) R_n(b, 0)}{b^2 r} \left[-\sqrt{\varepsilon(r, \theta)} \frac{R_n(r, \theta)}{\sqrt{\tilde{\gamma}_n(\theta)}} \right] e^{ih \int_0^\theta \tilde{\gamma}_n(\theta') d\theta'}. \quad (44)$$

$$E_r(r, \theta) = \frac{A^e}{\sqrt{\sin \theta}} \sum_n \frac{a \tilde{\gamma}_n(0) R_n(b, 0)}{b^2 r} \left[\frac{\sqrt{\tilde{\gamma}_n(\theta)} R_n(r, \theta)}{\sqrt{\varepsilon(r, \theta)}} \frac{1}{r} \right] e^{ih \int_0^\theta \tilde{\gamma}_n(\theta') d\theta'}. \quad (45)$$

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{A^e}{\sqrt{\sin \theta}} \sum_n \frac{a \tilde{\gamma}_n(0) R_n(b, 0)}{hb^2 r} \left[\frac{i}{\varepsilon(r, \theta) \sqrt{\tilde{\gamma}_n(\theta)}} \frac{\partial(\sqrt{\varepsilon(r, \theta)} R_n(r, \theta))}{\partial r} \right] e^{ih \int_0^\theta \tilde{\gamma}_n(\theta') d\theta'}. \quad (46)$$

Здесь $A^e = \sqrt{2\pi} \frac{h^{3/2} p_0 e^{i\pi/4}}{\sqrt{\varepsilon(b, 0)}}.$

Выражения для компонент ТЕ – поля имеют вид:

$$E_{\varphi}(r, \theta) = \frac{A^m}{\sqrt{\sin \theta}} \sum_n \frac{\tilde{\gamma}_n(0) R_n(b, 0)}{b^2 r} \left[-\frac{R_n(r, \theta)}{\sqrt{\tilde{\gamma}_n(\theta)}} \right] e^{ih \int_0^{\theta} \tilde{\gamma}_n(\theta') d\theta'} \quad (47)$$

$$B_r(r, \theta) = \frac{A^m}{\sqrt{\sin \theta}} \sum_n \frac{a \tilde{\gamma}_n(0) R_n(b, 0)}{b^2 r} \left[-\sqrt{\tilde{\gamma}_n(\theta)} \frac{R_n(r, \theta)}{r} \right] e^{ih \int_0^{\theta} \tilde{\gamma}_n(\theta') d\theta'} \quad (48)$$

$$B_{\theta}(r, \theta) = \frac{A^m}{\sqrt{\sin \theta}} \sum_n \frac{a \tilde{\gamma}_n(0) R_n(b, 0)}{hb^2 r} \left[\frac{(-i)}{\sqrt{\tilde{\gamma}_n(\theta)}} \frac{\partial(R_n(r, \theta))}{\partial r} \right] e^{ih \int_0^{\theta} \tilde{\gamma}_n(\theta') d\theta'} \quad (49)$$

Здесь $A^m = \sqrt{2\pi h^{3/2} m_0} e^{i\pi/4}$.

Численное моделирование

Реализован алгоритм расчета характеристик нормальных волн в опорных точках спектра. Спектр эффективно возбуждаемых излучателем и слабозатухающих нормальных волн $\tilde{\gamma}_n^2 = \xi_n + i\chi_n$ находится из решения трансцендентного уравнения (41) и уравнения (42). Вещественная γ_n и мнимая ν_n части спектрального параметра $\tilde{\gamma}$ определяются из системы уравнений:

$$\xi_n = \gamma_n^2 - \nu_n^2, \quad \chi_n = 2\gamma_n \nu_n \quad (50)$$

На рис. 1 приведены результаты расчета вещественной части спектрального параметра радиальной задачи γ_n от номера n для рабочих частот 4 и 10 МГц. Тестовые расчеты характеристик нормальных волн проведены для однослойного квазипараболического профиля электронной концентрации с высотой максимума F-слоя - 300 км и критической частотой слоя $f_0 = 6$ МГц [1]. При уменьшении рабочей частоты значение γ_n уменьшается и приближается к нулю с увеличением номера нормальной волны. Ниже на рис. 2 приведены графики зависимости мнимой части спектрального параметра ν_n от значения γ_n для тех же рабочих частот 4 и 10 МГц. Расчеты ν_n проводились для электрических параметров «средневлажной» земли и экспоненциального закона изменения эффективной частоты соударений [1]. Линия 1 на рисунке 2б соответствует волнам ТМ типа, линия 2 – ТЕ типа. Мнимые части ν_n для частоты $f = 4$ МГц резко увеличиваются в $\sim 10^2$ раз при уменьшении γ_n вблизи нуля, что обусловлено поглощением нормальных волн в ионосфере.

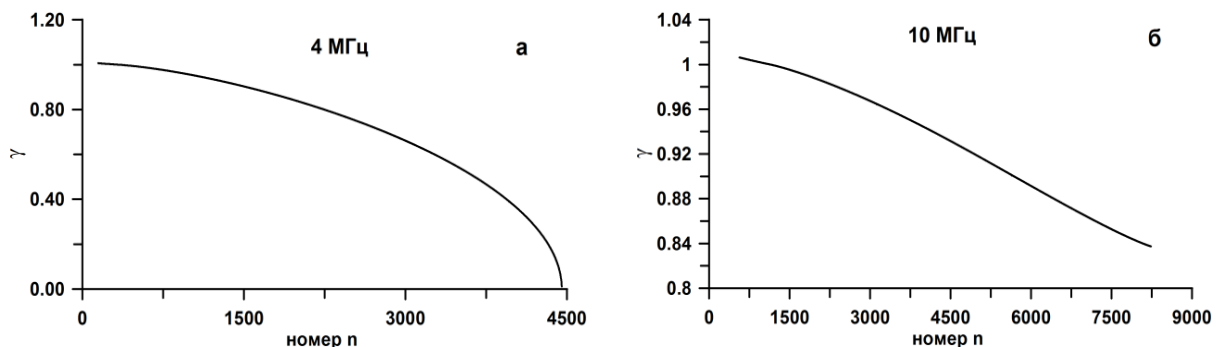


Рис.1. Зависимости вещественной части спектрального параметра γ_n от номера n

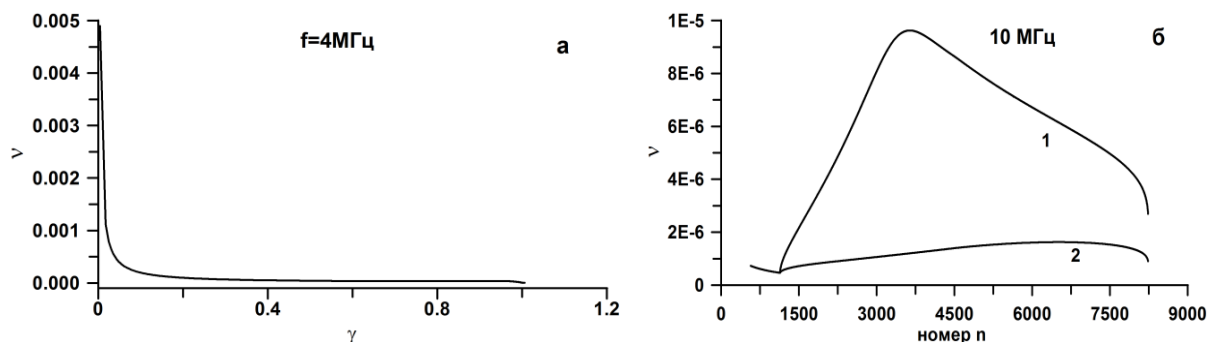


Рис.2. Зависимость мнимой части спектрального параметра ν_n от γ_n

Выводы

В работе в рамках волноводного подхода предложена модель распространения радиоволн в волноводе Земля – ионосфера. Для коэффициентов разложения в ряде нормальных волн получены решения без учета взаимодействия волн в неоднородном волноводе. Для низкочастотной части декаметрового диапазона модифицирована схема решения радиальной задачи и построения спектра радиального оператора. Для частот, меньших критической частоты слоя F2, реальные части спектрального параметра образуют последовательность, сходящуюся к нулю, что физически соответствует наличию углов распространения, сколь угодно близких к вертикали. Мнимые части спектрального параметра растут с номерами, но обусловлено это не прохождением волн через ионосферный барьер, а поглощением в ионосфере.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки (субсидия №075-ГЗ/Ц3569/278).

Литература

1. Куркин В.И., Орлов И.И., Попов В.Н. Метод нормальных волн в проблеме коротковолновой радиосвязи. М.: Наука, 1981. 124 с.
2. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 683 с.
3. Попов В.Н., Потехин А.П. О распространении декаметровых радиоволн в азимутально-симметричном волноводе Земля – ионосфера // Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. М.: Наука, 1984. Вып.69. С.9-15.
4. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1983. 352 с.
5. Хединг Д. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.:Мир,1965. 240 с.