

Обобщенные и общие уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с учетом тепловых потерь

Д.Ш. Ширапов, Г.Б. Итигилов, В.А. Кравченко

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления.

670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В.

E-mail: shir48@mail.ru

В работе [5] были получены обобщенные уравнения Гельмгольца HE- и EH- волн для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании без учета потерь, из которых выводились общие уравнения Гельмгольца HE- и EH- волн для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при продольном [5], нормальном [6] и касательном [7] намагничиваниях. Так как электрическая проводимость феррита в гиротропных волноводах не равна нулю, то в них неизменно происходят тепловые потери.

В данной работе получены учитывающие тепловые потери обобщенные уравнения Гельмгольца HE- и EH- волн для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании и соответствующие общие уравнения Гельмгольца HE- и EH- волн для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при продольном, нормальном и касательном намагничиваниях.

Generalized and general Helmholtz equations for gyrotropic waveguides taking into account heat losses

D.Sh. Shirapov, G.B. Itigilov, V.A. Kravchenko

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education east Siberian State University of Technology and Management

In [5] generalized Helmholtz equations of HE- and EH- waves were obtained for gyrotropic waveguides with orthogonally curved cross-section shapes with arbitrary magnetization without loss, from which general Helmholtz equations of HE- and EH- waves for gyrotropic waveguides with orthogonally curved cross-section shapes with longitudinal [5], normal [6] and tangential [7] magnetization were derived. Since the electrical conductivity of ferrite in gyrotropic waveguides is not zero, thermal losses invariably occur in them.

In this paper, taking into account heat losses, generalized Helmholtz equations of HE- and EH-waves for gyrotropic waveguides with orthogonally curved cross-sectional shapes under arbitrary magnetization and corresponding general Helmholtz equations of HE- and EH-waves for gyrotropic waveguides with orthogonally curved cross-sectional shapes under longitudinal, normal and tangential magnetization are obtained.

1. Введение

При разработках сверхвысокочастотных приборов (фазовращателей, гираторов, ослабителей, циркуляторов и других) используются намагнитные ферриты [1, 2]. При этом феррит можно намагничивать вдоль направления распространения электромагнитной волны, а также перпендикулярно направлению распространения.

К настоящему времени достаточно хорошо изучены различные характеристики и параметры распространения электромагнитных волн только в продольно

намагниченных гиротропных прямоугольных и цилиндрических волноводах [1-4]. Одной из причин этого является отсутствие достаточно полных математических моделей распространения электромагнитных волн в гиротропных волноводах с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании. К одним из таких работ относится [5], где для установившегося во времени процесса без наведенных токов и зарядов решением системы дифференциальных уравнений Максвелла [1] были получены обобщенные уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании без учета потерь в волноводах. Затем из этих обобщенных уравнений Гельмгольца были выведены общие уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при продольном [5], нормальном [6] и касательном [7] намагничиваниях без учета потерь.

Известно, что электрическая проводимость феррита не равна нулю. Например, удельное электрическое сопротивление феррита железа Fe_3O_4 равно $5 \cdot 10^{-5}$ Ом·м [8]. Поэтому в работе ставится задача вывода обобщенных уравнений Гельмгольца для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании с учетом тепловых потерь, а также соответствующих общих уравнений Гельмгольца при продольном, нормальном и касательном намагничиваниях.

2. Данные и обсуждение

Пусть электромагнитная волна в гиротропном волноводе с произвольной ортогональной формой поперечного сечения распространяется вдоль продольной координаты, совпадающей с осью Z декартовой системы координат. Тогда для установившегося во времени процесса без наведенных токов и зарядов для описания распространения электромагнитных волн в таком волноводе без учета потерь используется система дифференциальных уравнений Максвелла [1]

$$\begin{cases} \text{Rot} \bar{H} = j\omega \varepsilon \bar{E}, \\ \text{Rot} \bar{E} = -j\omega \bar{B}, \\ \text{Div} \bar{B} = 0, \\ \text{Div} \bar{D} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где \bar{H} и \bar{E} – напряженности магнитного и электрического полей;

j – мнимая единица;

$\bar{B} = \tilde{\mu} \bar{H}$ и \bar{D} – магнитная и электрическая индукции;

ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость феррита;

ω – циклическая частота;

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & jk & jl \\ -jk & \mu_{22} & jm \\ -jl & -jm & \mu_{33} \end{bmatrix} \text{ – тензор магнитной проницаемости феррита;}$$

$k, l, m, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$ – компоненты тензора магнитной проницаемости феррита при произвольном намагничивании;

$$k = \mu_0 \frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \text{ – магнитная постоянная;}$$

$Y = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кз}$ – гиромангнитное отношение;

$\omega_0 = \mu_0 Y H_0$ – частота ферромагнитного резонанса;

$\omega_m = \mu_0 Y M_0$ – частота;

H_0 – напряженность постоянного магнитного поля;

M_0 – намагниченность насыщения феррита.

В случае, когда однородная удельная электрическая проводимость феррита σ хотя мала, но не равна нулю, в гиротропных волноводах происходят тепловые потери, связанные с джоулевым нагревом. Тогда для устоявшегося во времени процесса с установившейся поляризацией и намагниченностью, при отсутствии свободных зарядов (плотность свободных зарядов стремится к нулю [9]) система уравнений Максвелла принимает вид

$$\begin{cases} \text{Rot} \bar{H} = j\omega \varepsilon' \bar{E}, \\ \text{Rot} \bar{E} = -j\omega \bar{B}, \\ \text{Div} \bar{B} = 0, \\ \text{Div} \bar{D} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\varepsilon' = \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega}$ – комплексная диэлектрическая проницаемость феррита.

Из (2) следует, что тангенс угла диэлектрических потерь среды распространения электромагнитных волн $tg \delta = \sigma / \omega \varepsilon$. Согласно данным из таблицы 1 [10] для феррита $tg \delta$ не равен нулю и принимает для устройств СВЧ значения в диапазоне $(2,5 \div 25) \cdot 10^{-4}$ в зависимости от материала изготовления. Так как значение $tg \delta \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$ достаточно большое, то в гиротропных волноводах имеет место ощутимые тепловые потери.

Из сравнения систем дифференциальных уравнений (1) и (2) следует, что их общий вид совпадает. Тогда согласно [11], общий вид решений системы уравнений (2) с учетом тепловых потерь также будет совпадать с общим видом решений системы уравнений (1) без потерь. Поэтому, общий вид обобщенных уравнений Гельмгольца для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании с учетом тепловых потерь совпадает с общим видом обобщенных уравнений Гельмгольца полученных без потерь [5]. Единственное отличие – замена абсолютной диэлектрической проницаемости феррита ε на комплексную диэлектрическую проницаемость ε' .

Следовательно, обобщенное уравнение Гельмгольца HE -волны для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании с учетом тепловых потерь, после замены ε на ε' , в соответствующей формуле из [5] будет иметь вид

$$\Delta_{11} H_z + \Delta_{22} H_z + j\gamma(\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) - j\omega^2 \varepsilon' (lH_1 + mH_2) + \omega^2 \varepsilon' \mu_{33} H_z = 0, \quad (3)$$

а обобщенное уравнение Гельмгольца EH -волны

$$\begin{aligned} & \mu_{11} \Delta_{11} E_z + \mu_{22} \Delta_{22} E_z + j\gamma(\mu_{11} \delta_1 E_1 + \mu_{22} \delta_2 E_2) + \omega(\mu_{11} m \delta_1 - \mu_{22} l \delta_2) H_z + \\ & + j\kappa \omega (-lH_1 - mH_2 - j\mu_{33} H_z) - \omega^2 \varepsilon' (k^2 - \mu_{11} \mu_{22}) E_z + j\omega (lk \delta_1 + mk \delta_2) H_z = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где согласно [5] γ – постоянная распространения;

(E_1, E_2, E_z) – компоненты напряженности электрического поля;

(H_1, H_2, H_z) – компоненты напряженности магнитного поля;

$$\Delta_{11} = \delta_1 \nabla_1 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{21}^2 \right) \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \right) \frac{\partial}{\partial x_1};$$

$$\Delta_{22} = \delta_2 \nabla_2 = \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_{12}^1 \right) \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\nabla_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad \nabla_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad \delta_1 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{21}^2 \right); \quad \delta_2 = \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_{12}^1 \right);$$

h_1, h_2 – коэффициенты Ламэ поперечных координатных осей;

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2}, \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \text{ – символы Кристоффеля 2-го рода.}$$

Согласно [11], вид общих уравнений Гельмгольца для гиротропных волноводов с произвольными ортогональными формами поперечного сечения с учетом тепловых потерь при продольном, нормальном и касательном намагничиваниях совпадает с видом общих уравнений Гельмгольца, полученных без учета потерь при продольном [5], нормальном [6] и касательном [7] намагничиваниях.

Поэтому общее уравнение Гельмгольца HE -волны для гиротропных волноводов с произвольными ортогональными формами поперечного сечения при *продольном* намагничивании с учетом тепловых потерь, после замены ε на ε' , в соответствующей формуле из [5] будет иметь вид

$$\Delta_{11} H_z + \Delta_{22} H_z + \left(\omega^2 \varepsilon' \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j \gamma \omega \varepsilon' \frac{k}{\mu} E_z = 0, \quad (5)$$

а общее уравнение Гельмгольца EH -волны

$$\Delta_{11} E_z + \Delta_{22} E_z + \left(\omega^2 \varepsilon' \mu_{\perp} - \gamma^2 \right) E_z - j \gamma \kappa \omega \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0, \quad (6)$$

где при продольном намагничивании в тензоре магнитной проницаемости феррита

$$\mu_{33} = \mu_{\parallel}, \quad \mu_{11} = \mu_{22} = \mu, \quad l = m = 0, \quad k \neq 0, \quad \mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}, \quad \mu_{\parallel} \approx \mu_0, \quad \mu = 1 + \frac{Y \mu_0 M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Общее уравнение Гельмгольца HE -волны для гиротропных волноводов с произвольными ортогональными формами поперечного сечения при *нормальном* намагничивании с учетом тепловых потерь, после замены ε на ε' , в соответствующей формуле из [6] будет иметь вид

$$\Delta_{11} H_z + \Delta_{22} H_z + j \gamma (\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) - j \omega^2 \varepsilon' m H_z + \omega^2 \varepsilon' \mu H_z = 0, \quad (7)$$

а общее уравнение Гельмгольца EH - волны

$$\mu_{\parallel} \Delta_{11} E_z + \mu \Delta_{22} E_z + j \gamma (\mu_{\parallel} \delta_1 E_1 + \mu \delta_2 E_2) + \omega \mu_{\parallel} m \delta_1 H_z + \omega^2 \varepsilon' \mu_{\parallel} \mu E_z = 0, \quad (8)$$

где при нормальном намагничивании в тензоре магнитной проницаемости феррита $\mu_{11} = \mu_{\parallel}$; $\mu_{22} = \mu_{33} = \mu$; $k = l = 0$; $m \neq 0$.

Общее уравнение Гельмгольца HE -волны для гиротропных волноводов с произвольными ортогональными формами поперечного сечения при *касательном* намагничивании с учетом тепловых потерь, после замены ε на ε' , в соответствующей формуле из [7] имеет вид

$$\Delta_{11}H_z + \Delta_{22}H_z + j\gamma(\delta_1H_1 + \delta_2H_2) - j\omega^2\varepsilon' lH_1 + \omega^2\varepsilon'\mu H_z = 0, \quad (9)$$

а общее уравнение Гельмгольца *EH*-волны

$$\mu\Delta_{11}E_z + \mu_{\parallel}\Delta_{22}E_z + j\gamma(\mu\delta_1E_1 + \mu_{\parallel}\delta_2E_2) - \omega\mu_{\parallel}l\delta_2H_z + \omega^2\varepsilon'\mu_{\parallel}\mu E_z = 0, \quad (10)$$

где при касательном намагничивании в тензоре магнитной проницаемости феррита $\mu_{22} = \mu_{\parallel}$, $\mu_{11} = \mu_{33} = \mu$, $k = m = 0$, $l \neq 0$.

Основные выводы:

1. Получены обобщенные уравнения Гельмгольца *HE*- (3) и *EH*- волн (4) для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании с учетом тепловых потерь;
2. Получены общие уравнения Гельмгольца (5) и (6) для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь для *HE*- и *EH*- волн, соответственно;
3. Получены общие уравнения Гельмгольца *HE*- (7) и *EH*- волн (8) для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании с учетом тепловых потерь;
4. Получены общие уравнения Гельмгольца (9) и (10) для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при касательном намагничивании с учетом тепловых потерь для *HE*- и *EH*- волн, соответственно.

Литература

1. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. Л.: Госэнергоиздат, 1963. 664 С.
2. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994. 464 С.
3. Лакс Б., Баттон К. Сверхвысочастотные ферриты и ферритмагнетики. М.: Мир, 1965. 676 С.
4. Раевский С.Б., Седаков А.Ю., Титаренко А.А. Метод электродинамического расчета прямоугольных закрытых волноводов с произвольным анизотропным заполнением // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2012. Т.15. №3. С. 14-21.
5. Ширапов Д.Ш., Итигилов Г.Б. Обобщенные уравнения Гельмгольца гиротропных волноводов произвольной формы поперечного сечения // Материалы II Всероссийской научной конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн», г. Муром. 26-28 июня 2018 г. С. 209-219.
6. Ширапов Д.Ш., Итигилов Г.Б. Уравнения Гельмгольца гиротропных эллиптических волноводов при нормальном намагничивании // Материалы 74-ой Всероссийской конференции (с международным участием) «Радиоэлектронные устройства и системы для инфокоммуникационных технологий», Москва. 29-31 мая 2019 г. С. 18-21.
7. Ширапов Д.Ш., Итигилов Г.Б. Уравнения Гельмгольца гиротропных эллиптических волноводов при касательном намагничивании // Материалы Всероссийской открытой научной конференции «Современные проблемы

дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн», г. Муром. 28-30 мая 2019 г. С. 710-713.

8. Петрова Л.Г., Потапов М.А., Чудина О.В. Электротехнические материалы. М.: МАДИ (ГТУ), 2008. 198 С.

9. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: ЛЕНАНД, 2014, 2019. 432 С.

10. Устинов А., Кочемасов В., Хасьянова Е. Ферритовые материалы для устройств СВЧ-электроники. Основные критерии выбора // СВЧ-электроника, 2015. №8. С.86-92.

11. Балашин Ю.А., Белов П.А., Краснок А.Е. Классическая электродинамика. Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2019. 109 С.