

## **Особенности асимптотического решения в форме канонического оператора Маслова для задачи о критическом отражении радиоволн от неоднородного ионосферного слоя**

Е.А. Палкин<sup>1</sup>, А.А. Петрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Российский новый университет (РосНОУ)  
105005, г. Москва, ул. Радио, 22.*

*E-mail: [palkin@rosnou.ru](mailto:palkin@rosnou.ru)*

<sup>2</sup> *Московский физико-технический институт (ГУ МФТИ)  
141701, г. Долгопрудный Моск. Обл., институтский пер., 9.*

*E-mail: [aapetrovich@bk.ru](mailto:aapetrovich@bk.ru)*

*На основе метода канонического оператора Маслова построено асимптотическое решение для модельной задачи о падении на параболический плазменный слой волны, излученной точечным источником, находящимся вне слоя плазмы. Решение учитывает как формирование в неоднородном слое фокальных структур различного типа, так и эффекты полупрозрачности слоя для различных частей пространственного спектра волны. Эффекты полупрозрачности слоя (частичное отражение проходящих слой волн и частичное просачивание волн, отраженных слоем) представлены в виде взаимодействия отдельных мод решения, отвечающих различным подмногообразиям лагранжева многообразия задачи. Учет взаимодействия мод реализован путем согласования плотности меры на различных подмногообразиях, обеспечивающего равномерное по параметру близости к условиям критического отражения асимптотическое представление решения для всех его компонент (представлены формулы для главных членов асимптотик).*

*Ключевые слова: канонический оператор, канонический атлас карт, полупрозрачный плазменный слой, фокусировка, лагранжевы многообразия, особенности проекций, каустики, асимптотические решения.*

## **Features of the asymptotic solution in the form of the canonical Maslov operator for the problem of critical reflection of radio waves from an inhomogeneous ionospheric layer**

Е.А. Palkin<sup>1</sup>, А.А. Petrovich<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Russian New University (RNU),*

<sup>2</sup> *Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT)*

*Based on the Maslov canonical operator method, an asymptotic solution is constructed for the model problem of a wave incident on a parabolic plasma layer emitted by a point source located outside the plasma layer. The solution takes into account both the formation of focal structures of various types in an inhomogeneous layer and the translucency effects of the layer for different parts of the spatial wave spectrum. The effects of layer translucency (partial reflection of waves passing through the layer and partial seepage of waves reflected by the layer) are presented as the interaction of individual solution modes corresponding to various submanifolds of the Lagrangian manifold of the problem. The interaction of modes is taken into account by matching the measure density on various submanifolds, which provides an asymptotic representation of the solution for all its components uniform in terms of proximity to the conditions of critical reflection (formulas for the main terms of the asymptotics are presented).*

*Keywords: canonical operator, canonical atlas of maps, translucent plasma layer, focusing, Lagrangian manifolds, projection features, caustics, asymptotic solutions.*

## Введение

В работе [1] нами предложено асимптотическое решение в форме канонического оператора В.П.Маслова (КОМ) [2-4] для описания эффектов, связанных с критическим отражением радиоволны от ионосферного слоя. Под термином «критические» отражение здесь мы понимаем отражение квазиплоской волны, падающей на слой под углом  $\theta_c$ , который соответствует в геометрооптическом приближении границе между условием отражения и условием прохождения волн через слой. Для случая падения плоской волны на слой с параболическим профилем электронной концентрации:

$$n^2(x) = \begin{cases} 1 - \beta^2 * (a^2 - x^2) & \text{при } x \in [-a, +a] \\ 1 & \text{при } x \geq a, x \leq -a \end{cases} \quad (1)$$

где  $[-a, +a]$  - границы плазменного слоя относительно его максимума, расположенного на уровне  $x=0$ ,  $\beta^2 = \frac{f_p^2}{f^2}$  - параметр «плотности» плазменного слоя ( $f_p$  - плазменная частота в максимуме электронной концентрации, критическая частота слоя,  $f$  - частота падающей волны), - в [5] нами рассматривалось точное решение задачи и его асимптотические формы при  $ka = h^{-1} \gg 1$  ( $k$  - волновое число; обозначая «большой параметр» задачи через  $h^{-1}$ , мы следуем обозначениям, принятым в методе КОМ). В зависимости от значения параметра:

$$\gamma = \frac{\cos \theta}{\beta a} \quad (2)$$

где  $\theta$  - угол падения плоской волны на слой, в такой задаче имеет место либо прохождение волны (при  $\gamma > 1$ ) с эффектом частичного «надбарьерного» отражения, либо отражение (при  $\gamma < 1$ ) с эффектом частичного «подбарьерного» просачивания. При  $\gamma = 1$  имеет место критическое отражение, соответственно,

$$\cos \theta_c = \beta a \quad (3)$$

В случае, если на слой подает не плоская волна и  $\beta a < 1$ , условия отражения или прохождения волны через слой возникают для разных частей пространственного спектра волны и разделить их нельзя. Особенности построения асимптотического описания структуры волнового поля в таких условиях рассмотрены в представленном материале.

## Модельная задача и особенности проекций лагранжнвых многообразий.

Построение асимптотического решения методом КОМ начнем с анализа структуры лагранжнвых многообразий, соответствующих дифференциальному оператору уравнения Гельмгольца с показателем преломления (1), и граничными условиями, отвечающими падению на слой волны, излученным точечным источником, находящимся ниже слоя. Для упрощения выкладок рассмотрим двумерную задачу, которая отражает, тем не менее, все основные особенности решения:

$$\left[ \Delta_{xy} + k^2 n^2(x) \right] \psi(x, y) = 0, \quad (4)$$

$$\psi_{in}(x, y) \Big|_{x=-a, y=y_0-H \operatorname{tg} \theta} = A_0 \sqrt{\frac{\cos \theta(x, y)}{H}} * \exp \left( i k \frac{H}{\cos \theta(x, y)} \right); \quad \left( 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right). \quad (5)$$

Здесь поле падающей волны задано в форме асимптотики функции Ханкеля при  $kH \gg 1$ , что соответствует условию рассматриваемых коротковолновых асимптотических решений.  $H$  – расстояние от источника до нижней границы слоя,  $A_0$  – константа, характеризующая мощность точечного источника излучения (см. рисунок 1). Вторым граничным условием для уравнения (4) выберем условие отсутствия волны, падающей на слой сверху.

Лагранжево многообразие  $\Gamma(\vec{p}, \vec{q})$  бихарактеристик задачи (4), (5) строится стандартным образом как совокупность решений гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для гамильтониана

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = H(p_x, p_y, x, y) = p_x^2 + p_y^2 - (1 - \beta^2 * (a^2 - x^2)) \quad (6)$$

и начальных условий, согласованных с граничными условиями задачи (см., например, [2-4]). В данном случае оно состоит из двух подмногообразий  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$  и  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ :

$$\Gamma(\vec{p}, \vec{q}) = \bigcup_{j=1,2} \Gamma_j \Big|_{H(\vec{p}, \vec{q})=0}, \quad (7)$$

где в естественной системе координат  $\{\tau, \theta\}$  ( $\tau$  – параметр вдоль бихарактеристики, лучевой траектории для заданного угла падения на слой –  $\theta$ ).

$\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(\tau, \theta) = \begin{cases} -a + \tau \cos \theta, & \text{при } \tau \in [-\frac{H}{\cos \theta}, 0] \\ -a \operatorname{ch}(\beta \tau) + \frac{\cos \theta}{\beta} \operatorname{sh}(\beta \tau), & \text{при } \tau \in [0, 2\tau_c] \\ \pm(a + (\tau - 2\tau_c) \cos \theta), & \text{при } \tau \geq 2\tau_c \end{cases} \\ y_1(\tau, \theta) = H \operatorname{tg} \theta + \tau \sin \theta \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} p_{x1}(\tau, \theta) = \begin{cases} \cos \theta, & \text{при } \tau \in [-\frac{H}{\cos \theta}, 0] \\ -a\beta \operatorname{sh}(\beta \tau) + \cos \theta * \operatorname{ch}(\beta \tau), & \text{при } \tau \in [0, 2\tau_c] \\ \pm \cos \theta, & \text{при } \tau \geq 2\tau_c; \end{cases} \\ p_{y1}(\tau, \theta) = \sin \theta \end{array} \right. \quad (8)$$

и  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(\tau, \theta) = -x_1(\tau, \theta) \\ y_2(\tau, \theta) = y_1(\tau, \theta) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} p_{x2}(\tau, \theta) = -p_{x1}(\tau, \theta) \\ p_{y2}(\tau, \theta) = p_{y1}(\tau, \theta) \end{array} \right. \quad \text{при } \tau \geq \tau_c. \quad (9)$$

В (8) верхнее значение знака "±" соответствует выполнению условия «прохождения» траектории  $\{\vec{p}, \vec{q}\}(\tau, \theta)$  через слой ( $\gamma > 1$ ), и, соответственно, значение  $\tau_c(\theta)$  находится как решение уравнения:

$$\operatorname{th}(\beta \tau_c) = \gamma^{-1} \quad (10)$$

Нижнее значение знака "±" соответствует выполнению условия «отражения» траектории от плазменного слоя ( $\gamma < 1$ ), и значение  $\tau_c$  находится как решение уравнения:

$$\operatorname{th}(\beta \tau_c) = \gamma \quad (11)$$

При этом для случая (10) точка  $\tau_c$  соответствует в координатном пространстве точке пересечения лучевой траекторией уровня максимума электронной плотности при  $x_{ref} = 0$ , а для случая (11) – точке отражения траектории от слоя  $x_{ref} = -a\sqrt{1-\gamma^2}$  (точке с минимальным расстоянием от максимума слоя до траектории с фиксированным значением параметра  $\theta$ ).

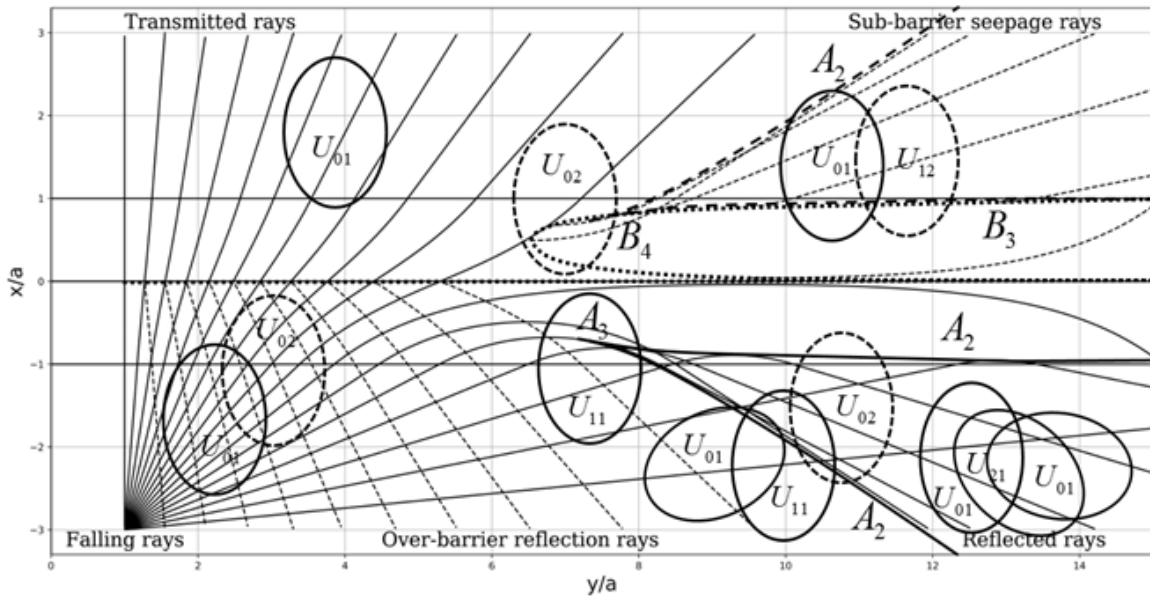
Подмногообразие  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$  «учитывает» эффект полупрозрачности неоднородного слоя. На нем гамильтониан (6) также имеет нулевое значение, а начальные условия соответствуют возбуждению волн частичного отражения, или волн просачивания, которые не описываются каноническим оператором на  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ . Следуя [1], данное подмногообразие задается семейством решений системы (9) с начальными данными:

$$x_2|_{\tau=\tau_c} = -x_1(\tau_c, \theta), \quad y_2|_{\tau=\tau_c} = y_1(\tau_c, \theta), \quad p_{x2}|_{\tau=\tau_c} = -p_{x1}(\tau_c, \theta), \quad p_{y2}|_{\tau=\tau_c} = p_{y1}(\tau_c, \theta). \quad (12)$$

Геометрию лагранжева многообразия  $\Gamma(\vec{p}, \vec{q})$  рассматриваемой задачи в проекции на координатное пространство  $\{x, y\}$  для случая, когда  $\beta a < 1$ , представляет рисунок 1.

На многообразии (8), (9) в соответствии с методом КОМ построим канонический атлас карт. Для этого определим множество особых (фокальных) точек и их тип. Данное множество задается условием:

$$J_{xy} = \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\tau, \theta)} \right\|_{\tau_\Sigma, \theta_\Sigma} = 0. \quad (13)$$



**Рис. 1.** Структура лагранжева многообразия  $\Gamma(\vec{p}, \vec{q})$ , его особенностей и канонического атласа для задачи о падении волны на параболический плазменный слой (сплошными линиями разной толщины отмечены траектории, множество фокальных точек и карты канонического атласа подмногообразия  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ , штриховыми – подмногообразия  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ , пунктиром – проекция граничного множества  $\partial\Gamma_2$ ).

С учетом (8) на  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$  уравнение (13) имеет решение, которое может быть представлено в виде:

$$th(\beta\tau_\Sigma) = \left[ \gamma^{-1} - \frac{\sin^2 \theta_\Sigma \cos \theta_\Sigma}{\beta(H + \tau_\Sigma \cos^3 \theta_\Sigma)} \right]^{-1} \quad \text{при } \tau \in [0, 2\tau_c], \quad (14)$$

$$\tau_\Sigma = 2 \sin^2 \theta_\Sigma \left[ \tau_c - \frac{\gamma}{\beta(\gamma^2 - 1)} \right] - \frac{H}{\cos \theta_\Sigma} \quad \text{при } \tau \geq 2\tau_c. \quad (14')$$

При  $\tau \in [-\frac{H}{\cos \theta}, 0]$  решений (13) нет. Соотношения (14) и (14') параметрически задают множество фокальных точек (особенностей) на  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ :  $\{\vec{p}_{1\Sigma}, \vec{q}_{1\Sigma}\}$ , представленных для случая  $\beta a < 1$  на рисунке. С позиции геометрической оптики – это семейство каустик. Можно показать, что данное множество имеет фокальные точки только типа  $A_2$  (гладкая каустика), или типа  $A_3$  (каустическое острие).

На подмногообразии  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$  в силу (12) множество фокальных точек имеет ту же структуру, что и на  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ , то есть определяется соотношениями (14), (14'), только  $\{p_{x2\Sigma} = -p_{x1\Sigma}, p_{y2\Sigma} = p_{y1\Sigma}, x_{2\Sigma} = -x_{1\Sigma}, y_{2\Sigma} = y_{1\Sigma}\}$ . Единственным отличием является присутствие на  $\Gamma_2$  границы  $\partial\Gamma_2$ :

$$\partial\Gamma_2 = \left\{ \left( x_2 = -x_{ref} = a\sqrt{1-\gamma^2}, y_2 = y_2(\tau_c) \text{ при } \theta_c < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \cup \left( x_2 = 0 \text{ при } 0 < \theta < \theta_c \right) \right\} \quad (15)$$

и связанных с ней структур краевых особенностей типа  $B_3$  и  $B_4$  [6], которые возникают в силу ограничения  $\tau \geq \tau_c$ .

Наличие фокальных точек на подмножествах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не позволяет использовать в построении решения КОМ атлас, состоящий только из неособых карт. Для решения в окрестности фокальных точек используем особые карты с каноническими переменными  $\{p_x, y\}$ . Выбор таких карт определяется отсутствием в области фокальных точек нулей якобиана

$$J_{p_x y} = \left| \frac{\partial(p_x, y)}{\partial(\tau, \theta)} \right|. \quad (16)$$

В общем случае выбор особых карт с ненулевым якобианом (16) может оказаться недостаточным и потребуются иная совокупность канонических переменных, но в данной задаче можно ограничиться только картами с координатами  $\{p_x, y\}$  (см., например, [7]).

Таким образом, решение в форме КОМ построим на атласе, содержащем неособые карты в зонах, где фокальные точки отсутствуют, и особые карта с координатами  $\{p_x, y\}$  в областях, содержащих фокальные особенности.

### **Решение в форме КОМ. Согласование канонических карт атласа.**

Асимптотическое решение задачи (4), (5) в форме КОМ имеет вид [2-4]:

$$\psi_{asymp}(x, y) = \sum_{j=1,2} \left[ \sum_{kj} \hat{K} \varphi \Big|_{U_{kj}} \right], \quad (17)$$

где  $U_{kj}$  - карта канонического атласа, относящаяся к атласу одного из подмногообразий  $\Gamma_j(\vec{p}_j, \vec{q}_j)$ ;  $j=1,2$  и покрывающая некоторую окрестность исследуемой точки  $\{x, y\}$ . Суммирование по  $kj$  ведется по всем картам, покрывающим заданную точку, а суммирование по  $j$  учитывает вклад решений на картах как подмногообразия  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ , так и подмногообразия  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ . На каждой канонической карте  $U_{kj}$

$$\hat{K} \varphi \Big|_{U_{kj}} = \tilde{F}_{\vec{p}_l \rightarrow \vec{q}_l}^{1/h} \left[ \exp(ih^{-1} S_l(\vec{p}_l, \vec{q}_l)) \mu_l^{1/2} D_l(\vec{p}_l, \vec{q}_l) \varphi(\vec{p}_l, \vec{q}_l) \right]_{U_{kj}} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \text{Ind } l \Big|_{U_{kj}}\right). \quad (18)$$

В (18)  $\tilde{F}_{\vec{p}_l \rightarrow \vec{q}_l}^{1/h}$  - обратное  $1/h$ -преобразование Фурье по указанным импульсным переменным особой карты,  $S_l(\vec{p}_l, \vec{q}_l)$  - модифицированная фазовая функция и  $\mu_l$  - плотность меры на карте с координатами  $\{\vec{p}_l, \vec{q}_l\}$  (в качестве таковой удобно взять величину  $\mu_l = \frac{1}{\left| J_{\vec{p}_l, \vec{q}_l} \right|}$ ),  $\text{Ind } l \Big|_{U_{kj}}$  - индекс Маслова-Арнольда, вычисленный на  $\Gamma(\vec{p}, \vec{q})$

для карты  $U_{kj}$  [2-4]. Как отмечалось выше, в данной задаче канонический атлас можно построить, используя только неособые карты с координатами  $\{x, y\}$  и особые карты с координатами  $\{p_x, y\}$ . Компоненты асимптотического решения на картах первого типа будут представлять собой решения геометрикооптического (или ВКБ) вида, а на картах второго типа будут иметь вид однократных интегралов с осциллирующим ядром, которые можно представить через специальные функции, отвечающие типу особенности. А именно:

а) неособая карта  $U_{kj}$

$$\hat{K} \varphi \Big|_{U_{kj}} = \exp(ikS_0(x, y)) \mu_0^{1/2} D_0(x, y) \varphi(x, y) \Big|_{U_{kj}} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \text{Ind } l \Big|_{U_{kj}}\right). \quad (19)$$

б) особая карта  $U_{kj}$

$$\hat{K} \varphi \Big|_{U_{kj}} = \left( i \frac{k}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{p_x} \exp(ik(S_1(p_x, y) + p_x x)) \mu_1^{1/2} D_1(p_x, y) \varphi(p_x, y) dp_x \Big|_{U_{kj}} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \text{Ind } l \Big|_{U_{kj}}\right). \quad (20)$$

Вычисление функций, входящих в формы КОМ (19) и (20) с использованием формул (8) и (9), определяющих подмногообразия  $\Gamma_j(\vec{p}_j, \vec{q}_j)$ ;  $j=1,2$ , и условия (5), приводит к следующим результатам:

а) неособая карта  $U_{kj}$

$$S_0(x, y) = \begin{cases} \tau + \frac{H}{\cos \theta} & \text{при } \tau \in [-\frac{H}{\cos \theta}, 0] \\ \tau \left( 1 - \frac{a^2 \beta^2}{2} (1 + \gamma^2) \right) + \frac{H}{\cos \theta} + sh(\beta \tau) \left( \frac{a^2 \beta}{2} (1 + \gamma^2) ch(\beta \tau) - a \cos \theta sh(\beta \tau) \right) & \text{при } \tau \in [0, 2\tau_c] \\ \tau + \frac{H}{\cos \theta} + a^2 \beta (\gamma - \tau_c \beta (1 + \gamma^2)) & \text{при } \tau \geq 2\tau_c \end{cases} \quad (21)$$

$$\mu_0 = \frac{1}{|J_{x,y}|} = \begin{cases} \left| \tau + \frac{H}{\cos \theta} \right|^{-1} & \text{при } \tau \in [-\frac{H}{\cos \theta}, 0] \\ \left| sh(\beta \tau) \left( \frac{\sin^2 \theta}{\beta} - \gamma^{-1} \left( \frac{H}{\cos \theta} + \tau \cos^2 \theta \right) \right) + ch(\beta \tau) \left( \frac{H}{\cos \theta} + \tau \cos^2 \theta \right) \right|^{-1} & \text{при } \tau \in [0, 2\tau_c] \\ \left| \tau + \frac{H}{\cos \theta} + 2 \sin^2 \theta \left( \frac{\gamma}{\beta (\gamma^2 - 1)} - \tau_c \right) \right|^{-1} & \text{при } \tau \geq 2\tau_c \end{cases}$$

б) особая карта  $U_{kj}$

$$S_1(p_x, y) + p_x x = \begin{cases} \tau \left( 1 - \frac{a^2 \beta^2}{2} (1 + \gamma^2) \right) + \frac{H}{\cos \theta} + ch(\beta \tau) \left( a \cos \theta ch(\beta \tau) - \frac{a^2 \beta}{2} (1 + \gamma^2) sh(\beta \tau) \right) \pm \\ \pm x (\cos \theta ch(\beta \tau) - a \beta sh(\beta \tau)) & \text{при } \tau \in [0, 2\tau_c] \\ \tau \sin^2 \theta + \frac{H}{\cos \theta} + -\tau_c a^2 \beta^2 (1 - \gamma^2) \mp x \cos \theta & \text{при } \tau \geq 2\tau_c \end{cases} \quad (22)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{|J_{p_x, y}|} = \begin{cases} \left| (sh(\beta \tau) - \gamma^{-1} ch(\beta \tau)) \left( \frac{H}{a} \gamma^{-1} + \beta \tau \cos^2 \theta \right) + ch(\beta \tau) \sin^2 \theta \right|^{-1} & \text{при } \tau \in [0, 2\tau_c] \\ \sin^{-2} \theta & \text{при } \tau \geq 2\tau_c \end{cases}$$

В (21) все функции, заданные в «естественных» переменных  $\{\tau, \theta\}$ , следует определить через  $\{x, y\}$  из (8), (9), что возможно, так как рассматриваемая карта – неособая. Причем для  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$  эти функции рассматриваются только при  $\tau \geq \tau_c$ . Неоднозначное решение соответствует нескольким неособым картам, покрывающим точку  $\{x, y\}$ , вклады которых суммируются в общем решении в соответствии с (17). С позиции дифракционно-лучевой теории это соответствует многолучевой интерференции волновых полей [8]. Аналогично в (22) все функции, заданные в координатах  $\{\tau, \theta\}$  следует переопределить через переменные  $\{p_x, y\}$  в соответствии с (8) и (9) (заметим, что параметр « $x$ » в (22) не является функцией, в частности поэтому фазовая функция содержит различный знак при  $x$ : верхний для  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$  и нижний для  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ ). В (22) не приведены формулы для диапазона  $\tau \in [-\frac{H}{\cos \theta}, 0]$ , так как в этой области фокальные точки отсутствуют и можно использовать только неособые карты.

Для завершения построения канонического оператора определим  $\varphi, D_I, \text{Ind } l|_{U_{kj}}$ . Сравнивая (5) и (19), находим, что для главного члена асимптотического решения в форме (18):

$$\varphi|_{U_{kj}} \cong A_0. \quad (23)$$

Следуя [1], для функций  $D_I$  положим:

$$D_I(\gamma)|_{U_{k1}} = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, p_x > 0, \\ R(\gamma)e^{i\frac{\pi}{2}} & \text{при } x < 0, p_x < 0, \\ T(\gamma) & \text{при } x > 0, p_x > 0. \end{cases} \quad (24)$$

$$D_I(\gamma)|_{U_{k2}} = \begin{cases} R(\gamma) & \text{при } x < 0, p_x < 0, \\ T(\gamma)e^{i\frac{\pi}{2}} & \text{при } x > 0, p_x > 0, \\ 0 & \text{при } x > 0, p_x < 0. \end{cases} \quad (25)$$

$$R = \delta e^{\frac{k\pi}{4}\beta a^2(1-\gamma^2)-i\frac{\pi}{2}}, \quad T = \delta e^{-\frac{k\pi}{4}\beta a^2(1-\gamma^2)} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{k}{2}\beta a^2(1-\gamma^2)\right). \quad (26)$$

В последнем выражении в (26) символ  $\Gamma$  обозначает гамма-функцию комплексного аргумента.

Согласование индекса карт канонического атласа данной задачи проведем для минимального их числа, достаточного для описания всех особенностей. На подмногообразии  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$  ограничимся максимально тремя картами для любой точки  $\{x, y\}$  конфигурационного пространства, и для подмногообразия  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$  также ограничимся максимум тремя картами. Для этого для любой бихарактеристической траектории-луча  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$  возьмем начальную карту  $U_{01}$  с  $\text{Ind } l|_{U_{01}} = 0$  в дальней зоне источника (например, в области задания условия (5)). До точки касания траекторией фокальной особенности типа  $A_2$  или типа  $A_3$  применимо решение (19) на данной карте. В окрестности фокальных точек используем особую карту  $U_{11}$  с  $\text{Ind } l|_{U_{11}} = 1$  (вычисление индекса проводится по формулам КОМ [2-4]) и решение (20). При удалении траектории (по  $\tau$ ) от точки касания особенности снова используем неособую карту  $U_{21}$  с решением (19), но с  $\text{Ind } l|_{U_{01}} = 1$ . Обратим внимание, что изменение индекса траектории происходит не в точке отражения (как в случае падения плоской волны [5]), а в фокальной точке, точке касания каустики. Для траекторий, соответствующих диапазону углов падения  $0 < \theta < \theta_c$  (при  $\beta a < 1$ ) можно ограничиться только неособой картой.

На подмногообразии  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$  начальную карту (неособую)  $U_{02}$  с  $\text{Ind } l|_{U_{02}} = 0$  возьмем для точек  $\{x, y\}$ , соответствующих решениям (9) при  $\tau = \tau_c$  (граничное множество (15)). При этом для траекторий, соответствующих эффекту «подбарьерного» просачивания, асимптотическое решение (19) будет иметь значение фазовой функции



$S_0(x, y)$  (21) такое же как у решения на подмногообразии  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$  на неособой карте, содержащей траекторию, «порождающую» соответствующую траекторию для волны просачивания (формулы (11) и (12)), но к ней добавится фазовый сдвиг  $+\frac{\pi}{2}$  (см. (25), (26)). Для траекторий, соответствующих эффекту «надбарьерного» отражения к значению фазовой функции  $S_0(x, y)$  добавится фазовый сдвиг  $-\frac{\pi}{2}$ , который можно интерпретировать как фазовый сдвиг при частичном отражении падающей волны на эффективной каустике, образующейся на уровне  $x_{ref} = 0$  (формулы (10), (12)). Построение остальных карт канонического атласа для  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$  полностью повторяет построение карт для  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$  с учетом симметрии (9). Описанные здесь карты канонического атласа и их расположение в конфигурационном пространстве относительно особенностей лагранжева многообразия задачи представлены на рисунке 1.

Определение карт канонического атласа вместе с асимптотическими формулами (19), (20) завершает построение асимптотического решения в форме КОМ, которое учитывает все особенности задачи.

### Выводы и обсуждение результатов

Важным преимуществом асимптотического решения в форме КОМ является возможность локализации конкретных форм решения в окрестностях различных особенностей. В рассматриваемой задаче помимо обычных фокальных точек, образующих в неоднородных ионосферных слоях каустические структуры, добавляются не только особенности волн «надбарьерного» отражения и «подбарьерного» просачивания, но и особенности их дальнейшей фокусировки в неоднородном плазменном слое. Так, например, из построения решения в форме КОМ для случая  $\beta a < 1$  (рисунок 1) следует, что главный член асимптотики полного решения будет содержать либо два слагаемых (в области вне фокальной особенности – каустики) либо четыре. В первом случае, это – вклады вида (19) неособых карт, отвечающих падающей волне (а также и отраженной от слоя, но не попавшей в зону каустики) и волне частичного «надбарьерного» отражения. Во втором случае, это – вклад (20) особой карты  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$  для особенности типа  $A_3$ , представимый через (см., например, [8]) интегральную функцию Т.Пирси [9] и две ее первые производные, либо вклад (20) особой карты  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$  для особенности типа  $A_2$ , представимый через функцию Эйри и ее производную [10] и вклад (19) неособой карты  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ , либо (внутри каустического острия) сумма вкладов (19) трех неособых карт подмногообразия  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ . К этим слагаемым добавляется вклад от  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ , отвечающей волне частичного «надбарьерного» отражения. Аналогично можно интерпретировать асимптотическое решение выше максимума слоя.

Отметим, что для полностью отражающего волну плазменного слоя (при условии  $\beta a > 1$ ) решение рассматриваемой задачи аналогично случаю, рассмотренному в [5], при этом единственной особенностью является гладкая каустика  $A_2$  отраженных от слоя траекторий подмногообразия  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ .

Предложенный способ определения решения на начальной карте атласа подмногообразия  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$  использует асимптотику коэффициентов отражения и прохождения плоской волны для модели параболического плазменного слоя, которая рассматривалась ранее, например, в [11,12]. В [5] показано, что формулы (24) – (26) можно использовать только вне особенности, формирующейся при падении плоской волны точно при критическом условии (3). В рассматриваемой задаче пространственный спектр падающей волны не является вырожденным и данное условие соответствует в конфигурационном пространстве  $\{x, y\}$  бесконечно удаленной точке. Это и позволяет использовать предложенные асимптотики.

Представленные формулы позволяют рассчитать структуру волнового поля в различных областях пространства и распространить данную схему решения на произвольное число слоев ионосферной плазмы. Это возможно потому, что эффекты «полупрозрачности» плазменного слоя существенны в узком диапазоне углов падения  $\Delta\theta \sim (ka \sin\theta_c)^{-1}$ , где и следует учитывать вклад в общее решение карт подмногообразия  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ . Использование других подходов к решению аналогичных задач, например, туннельного канонического оператора [13], системы уравнений переноса для связанных подмногообразий [14,15] или переход к решению в сопряженном по Фурье пространстве [16], не дают преимуществ при переходе к исследованию эффектов полупрозрачности для более сложных моделей многослойной ионосферной плазмы.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФ №20-12-00299.*

### **Литература**

1. Палкин Е.А., Петрович А.А. Канонический оператор Маслова в задаче о падении электромагнитной волны на полупрозрачный плазменный слой. //Всероссийская научная открытая конференция «Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции радиоволн» - «Муром 2021». Материалы конференции, Муром, 25 - 27 мая 2021 г. / Муром, Вл.ГУ, 2021. С.38-44 (ISSN 2304 – 029 (CD-ROM)).
2. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. – М.: изд. МГУ, 1965. – 553 с.
3. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 296 с.
4. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
5. Палкин Е.А., Петрович А.А. Асимптотические представления решения задачи о структуре волнового поля при падении плоской волны на полупрозрачный неоднородный плазменный слой (модельная задача). //Радиотехника и электроника. 2021. Т.66. №1. С.18-26.
6. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых катастроф. – М.: РосНОУ, 2013. – 368 с.
7. Ipatov E.B., Lukin D.S. and Palkin E.A. Maslov canonical operator in problems of numerical simulation of diffraction and propagation of waves in inhomogeneous media. //Soviet journal of numerical analysis and mathematical modelling. VNU Sciencepress BV. 1990. V.5. №6. P.465-488.
8. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Волновые катастрофы – фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн // Радиотехника и электроника. 2006. Т.51. №10. С.1155 – 1192.

9. Pearcey T. The structure of an electromagnetic field in the neighborhood of a cusp of a caustic. //Philos. Mag. 1946. V.37. P.311– 317.
10. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. – М.: Наука, 1972. – 456 с.
11. Rydbeck O. On the propagation of radio waves. //Trans. Chalmers Univ. Sweden, 1944. №34. 167 p.
12. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука, 1967. – 684 с.
13. Маслов В.П., Назайкинский В.Е. Туннельный канонический оператор в термодинамике. //Функциональный анализ и его приложения. 2006. Т.40. Вып.3. С.12-29.
14. Кучеренко В.В. Асимптотика решений системы  $\hat{A}(x, -i\frac{\partial}{\partial x})u = 0$  в случае характеристик переменной кратности. //Известия АН СССР, Математика. 1974. Т.58. №3. С.725-650.
15. Кучеренко В.В. Параметрикс для уравнений с вырождающимся символом. //Доклады АН СССР. 1976. Т.229. Вып. 4. С.797-800.
16. Маслов В.П. Операторные методы. – М.: Наука, 1973. – 544 с.