

Численное моделирование флуктуации параметров луча в ионосфере с регулярными и статистическими неоднородностями

Д.С. Лукин

*Российский новый университет
105005, г. Москва, ул. Радио, 22.
E-mail: luknet1@yandex.ru*

Рассчитываются флуктуации параметров луча в ионосфере. Численный расчет основывается на известном соответствии между аппаратом стохастических дифференциальных уравнений и уравнением Эйнштейна-Фоккера. Непосредственное интегрирование уравнений луча методом бихарактеристик в предположении о марковости процесса позволяет найти моменты второго порядка и функцию распределения случайных отклонений параметров луча от среднего значения

Ключевые слова: флуктуации, луч, бихарактеристики, статистические моменты, ионосфера

Numerical simulation of ray parameter fluctuations in a medium with regular and statistical inhomogeneities

D.S. Lukin

Russian New University.

The fluctuations of the ray parameters in the ionosphere are calculated. The numerical calculation is based on the well-known correspondence between the apparatus of stochastic differential equations and the Einstein-Fokker equation. Direct integration of the ray equations by the bicharacteristics method under the assumption that the process is Markovian allows us to find the second-order moments and the distribution function of random deviations of the ray parameters from the mean value.

Keywords: fluctuations, ray, bi-characteristics, statistical moments, ionosphere

Введение

Лучевое приближение является одним из основных и наиболее эффективных методов исследования распространения и рассеяния радиоволн в неоднородных средах. Решение многих задач по моделированию характеристик волны в земной ионосфере с учетом случайных неоднородностей, в том числе и расчет флуктуации направления распространения волны в статистически-неоднородной среде, целиком базируется на численном решении бихарактеристической системы [1,2]. Идея этого метода заключается в замене реального случайного процесса рассеяния лучей на неоднородных образованиях среды процессом марковского типа и применении эффективного математического аппарата теории марковских процессов.

Известны два различных подхода к описанию процесса рассеяния в марковском приближении. Один из них опирается на аналогию с хорошо известной статистической схемой, описывающей движение броуновской частицы – уравнение Эйнштейна-Фоккера [3]. Этот подход был предложен в монографии Л.А. Чернова [4] и дальнейшее развитие по лучил в работах С.М. Рытова [5,6], В.Д. Гусева [7,8] для среды в среднем однородной, а также в работах Н.Г. Денисова [9-13], В.М. Комиссарова [14-15], В.Д. Гусева и С.М. Голынского [16-18] для неоднородной в среднем среды. При таком

подходе до конца не определенными остаются условия применимости уравнения Эйнштейна-Фоккера.

Второй подход, развитый В.И. Татарским и В.И. Кляцкиным, является математически более строгим. Переход к марковскому процессу базируется на следующих предположениях [19-24]:

- флуктуации диэлектрической проницаемости среды являются гауссовым однородным и изотропным случайным полем со средним значением, равным нулю;
- компоненты корреляционного тензора, описывающего статистические характеристики флуктуации диэлектрической проницаемости, дельта-коррелированы вдоль направления распространения волны. В этом случае показано, что в приближении малоугловых флуктуации уравнение Эйнштейна-Фоккера является логическим следствием лучевых уравнений [19-24].

Круг вопросов, решаемых лучевым методом необычайно широк. В данной работе мы сосредоточим внимание на учете совместного влияния регулярных и статистических неоднородностей на флуктуации параметров электромагнитных волн. Предлагается свести решение ряда задач для широкого класса параметров неоднородной среды к единому численному методу, аналогичному методу характеристик, который бы позволил наряду с численным расчетом регулярного изменения фазы и напряжённости поля на характеристиках (вдоль лучей) определять и статистические параметры волны, не вводя существенных изменений в методику численного расчета.

Для случая плоскостройной среды учет совместного влияния регулярных и случайных неоднородностей на параметры луча проводился в работах [9-16]. Однако решение ряда задач, таких как учет влияния рефракции в атмосферах Земли, планет и солнечной короне на статистические характеристики излучения космических радиоисточников, расчет флуктуации доплеровского сдвига частоты коротких радиоволн в сферически-слоистой и регулярно-неоднородной ионосфере, требует обобщения результатов на случай трехмерно-неоднородной среды.

В данной работе рассчитываются флуктуации параметров луча в ионосфере, средние характеристики которой зависят от двух координат. Численный расчет флуктуации основывается на известном соответствии между аппаратом стохастических дифференциальных уравнений и уравнением Эйнштейна-Фоккера. Непосредственное интегрирование уравнений луча в предположении о марковости процесса позволяет найти моменты второго порядка и функцию распределения случайных отклонений параметров луча от среднего значения.

Флуктуации угла прихода

Пренебрегая влиянием магнитного поля Земли, бихарактеристическую систему уравнений для лучевой траектории можно представить в виде [1]:

$$\frac{d\vec{r}}{d\sigma} = \vec{S}, \quad \frac{d(n\vec{S})}{d\sigma} = \nabla n_0. \quad (1)$$

Здесь \vec{r} – радиус-вектор, определяющий траекторию луча, σ – путь вдоль луча, \vec{S} – единичный вектор касательный лучу, n – показатель преломления [4].

Пусть $n = n(\vec{r}) + \mu(\vec{r})$, где $n(\vec{r})$ – регулярное значение показателя преломления, $\mu(\vec{r})$ – случайные отклонения, причем $|\mu(\vec{r})| \ll n(\vec{r})$. Предположим, что траектория луча мало отличается от своего среднего значения

$$\vec{S} = \vec{S}_0 + \vec{S}_1, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1. \quad (2)$$

Отклонения \vec{S}_1 и \vec{r}_1 того же порядка малости, что и μ . Подставляя (2) в (1) и собирая члены одного порядка малости, получим две системы уравнений

$$\frac{d\vec{r}_0}{d\sigma} = \vec{S}_0, \quad \frac{d(n_0\vec{S}_0)}{d\sigma} = \nabla n_0, \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{r}_1}{d\sigma} = \vec{S}_1, \quad \frac{d\vec{S}_1}{d\sigma} = -\frac{dn_0}{d\sigma}/n_0 \cdot \vec{S}_1 - \frac{d(\mu_0\vec{S}_0)}{d\sigma}/n_0 + \frac{\nabla\mu_0}{n_0} + \vec{F}, \quad (4)$$

где $\mu_0 = \mu(\vec{r}_0)$; $n_0 = n(\vec{r}_0)$; $\vec{F} = \frac{\nabla(\vec{r}_1\nabla n_0)}{n_0} - \frac{d[\vec{S}_0(\vec{r}_1\nabla n_0)]}{d\sigma}/n_0$.

Система уравнений (3) определяет траекторию луча в среде при отсутствии случайных неоднородностей. Решив её и подставив значения $\vec{r}_0(\sigma)$ и $\vec{S}_0(\sigma)$ в (4), получим:

$$\frac{d\vec{r}_1}{d\sigma} = \vec{S}_1, \quad \frac{d\vec{S}_1}{d\sigma} = Q(\sigma)\vec{S}_1 + P(\sigma)\vec{f}(\sigma) + \vec{F}, \quad (5)$$

где

$$Q(\sigma) = -\frac{dn_0}{d\sigma}/n_0, \quad P(\sigma) = \frac{1}{n_0}, \quad \vec{f}(\sigma) = \nabla\mu_0 - \frac{d(\mu_0\vec{S}_0)}{d\sigma}. \quad (6)$$

Рассмотрим стохастическую задачу, определяемую системой дифференциальных стохастических уравнений (5) без последнего слагаемого в правой части второго уравнения системы. При учете этого члена процесс, определяемый системой (5), не является марковским, но как показано в [14], при достаточно плавной зависимости средних параметров среды от координат можно пренебречь значением этого члена в системе по сравнению с воздействием «случайной силы» $\vec{f}(\sigma)$. Если мы хотим ограничиться марковским процессом, необходимо сделать предположение о том, что $\vec{f}(\sigma)$ – дельта-коррелированный случайный процесс. Тогда импульс $\vec{P}(\sigma) = \int_0^\sigma \vec{f}(t) dt$ будет случайным процессом с независимыми приращениями. Допущение независимости приращений справедливо при условии, что весь путь σ можно разбить на малые по сравнению с σ интервалы $\Delta\sigma$ такие, что на пути $\Delta\sigma$ луч испытывает много некоррелированных случайных поворотов: $\Delta\sigma \gg l$, где l – масштаб случайной неоднородности. В то же время, отрезки $\Delta\sigma$ должны быть достаточно малы и по сравнению с расстоянием на которых луч существенно искривляется: $\Delta\sigma \gg l_1$, где l_1 – масштаб регулярной неоднородности.

Решение второго уравнения системы (5) можно записать по компонентам в виде:

$$S_{i1} = (S_{i1})_{\sigma=0} \cdot l^{a(\sigma)} + e^{a(\sigma)} \int_0^\sigma P(u) e^{-a(u)} f_i(u) du, \quad (7)$$

где $a(\sigma) = \int_0^\sigma Q(t) dt$.

Подставляя значения Q и P из (6) в (7) и считая для определённости, что начальное отклонение от среднего равно нулю, получим

$$S_{i1} = \frac{1}{n_0} \int_0^\sigma f_i(u) du. \quad (8)$$

Из (8) легко найти моменты второго порядка для отклонений луча от среднего направления

$$\langle S_{i1} S_{k1} \rangle = \frac{1}{n_0^2} \int_0^\sigma \int_0^\sigma \langle f_i(u) f_k(u^1) \rangle du du^1. \quad (9)$$

В силу предположения о дельта-коррелированной случайной силе имеем

$$\langle f_i(u) f_k(u^1) \rangle = C_{ik}(u) \delta(u - u^1). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$\langle S_{i1} S_{k1} \rangle = \frac{1}{n_0^2} \int_0^\sigma C_{ik}(u) du. \quad (11)$$

Таким образом, определение моментов второго порядка угловых отклонений сводится к нахождению коэффициентов C_{ik} , которые можно найти, проинтегрировав (10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle f_i(u) f_k(u^1) \rangle du^1 = C_{ik}(u). \quad (12)$$

Учитывая (6), уравнение (12) можно переписать в виде

$$C_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_k} \langle \mu_0 \mu_0^1 \rangle - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d}{du^1} \left(\langle \mu_0 \mu_0^1 \rangle S_{k0} - \frac{\partial}{\partial x'_k} \frac{d}{du} \left(\langle \mu_0 \mu_0^1 \rangle S_{i0}^1 \right) + \frac{d}{du} \frac{d}{du^1} \left(\langle \mu_0 \mu_0^1 \rangle S_{i0} S_{k0}^1 \right) \right) \right\} du^1. \quad (13)$$

В силу того, что функция корреляции $\langle \mu_0 \mu_0^1 \rangle$ заметно отлична от нуля на расстояниях порядка масштаба случайной неоднородности, искривлением луча на этом расстоянии можно пренебречь и проводить интегрирование при постоянном значении \vec{S}_0 , то есть вдоль прямой.

Вводя коэффициент корреляции и относительные координаты $x_i - x_i^1 = x_i^*$; $u - u^1 = u^*$, получим

$$C_{ik} = - \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mu_0^2 \rangle \left\{ \frac{\partial^2 N}{\partial x_i^* \partial x_k^*} - S_{k0} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{dN}{du^*} - S_{i0} \frac{\partial}{\partial x_k^*} \frac{dN}{du^*} + S_{i0} S_{k0} \frac{d^2 N}{du^{*2}} \right\} du^*. \quad (14)$$

Запишем уравнение прямой в относительных координатах

$$x_i^* = S_{i0} u^* \left(\sum_{i=1}^3 x^{*2} = u^{*2} \right) \quad (15)$$

Будем считать, что среда статистически изотропна: $N = N(u^*)$. Опуская индекс (*) у относительных координат, имеем

$$\frac{\partial N}{\partial x_i} = \frac{x_i}{u} \frac{dN}{du},$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \frac{1}{u} \frac{dN}{du} - \frac{x_i x_k}{u^3} \frac{dN}{du} + \frac{x_i x_k}{u^2} \frac{d^2 N}{du^2}.$$
(16)

Учитывая (5) и (6), для первых трёх членов под интегралом получим:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_k} = S_{i0} S_{k0} \frac{d^2 N}{du^2} + \frac{(\delta_{ik} - S_{i0} S_{k0})}{u} \frac{dN}{du}$$

$$S_{k0} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dN}{du} = S_{i0} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{dN}{du} = S_{i0} S_{k0} \frac{d^2 N}{du^2},$$
(17)

здесь $\delta_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k}$ – символ Кроннекера.

Подставляя выражения (17) в (14), получим:

$$C_{ik} = -\langle \mu_0^2 \rangle (\delta_{ik} - S_{i0} S_{k0}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} \frac{dN}{du} du$$
(18)

или

$$C_{ik} = 2(\delta_{ik} - S_{i0} S_{k0}) \cdot D,$$
(19)

где D – коэффициент диффузии

$$D = -\langle \mu_0^2 \rangle \int_0^{\infty} \frac{1}{u} \frac{dN}{du} du.$$
(20)

Подставляя найденные значения коэффициентов C_{ik} в формулу для моментов второго порядка (11), получим:

$$\langle S_{ik} S_{k1} \rangle = \frac{2}{n_0^2} \int_0^{\sigma} (\delta_{ik} - S_{i0} S_{k0}) D d\sigma.$$
(21)

Отклонения $\vec{S} - \vec{S}_0$ подчинены нормальному закону распределения, функция распределения $W(\vec{S}_1, \sigma)$ стандартно выражается через найденные моменты второго порядка (21). Переходя в пространстве \vec{S}_1 к сферическим координатам, легко получить угловое распределение $W(\theta_1, \phi_1, \sigma)$.

Представляет интерес найти значение среднего квадрата угла отклонения луча от регулярного направления. При малых углах квадрат угла отклонения от регулярного направления \vec{S}_0 определяется квадратом перпендикулярной к \vec{S}_0 составляющей вектора \vec{S}_1 . Учитывая, что $|\vec{S}_0| = 1$ имеем

$$\vec{S}_{\perp} = \vec{S}_1 - \vec{S}_0 (\vec{S}_0 \vec{S}_1).$$
(22)

Откуда

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \langle \vec{S}_{\perp}^2 \rangle = \langle (\vec{S}_0 \vec{S}_1)^2 \rangle.$$
(23)

Используя (21), найдём $\langle \vec{S}_1^2 \rangle$ и $\langle (\vec{S}_0 \vec{S}_1)^2 \rangle$

$$\langle \vec{S}_1^2 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^3 S_{i1}^2 \right\rangle = \frac{2}{n_0^2} \int_0^{\sigma} \sum_{i=1}^3 (\delta_{ii} - S_{i0}^2) d\sigma = \frac{4}{n_0^2} \int_0^{\sigma} D d\sigma$$
(24)

$$\begin{aligned}
\langle (\vec{S}_0 \vec{S}_1)^2 \rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^3 S_{i0} S_{i1} \right)^2 \right\rangle = \\
&= \frac{2}{n_0^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{K=1}^3 S_{i0} S_{K0} \int_0^\sigma (\delta_{iK} - S_{i0} S_{K0}) D d\sigma = \\
&= \frac{2}{n_0^2} \left[\int_0^\sigma D d\sigma - \sum_{i=1}^3 \sum_{K=1}^3 S_{i0} S_{K0} \int_0^\sigma S_{i0} S_{K0} D d\sigma \right].
\end{aligned} \tag{25}$$

Подставляя (24) и (25) в (23) для среднего квадрата угла отклонения от регулярного направления распространения получим формулу

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{2}{n_0^2} \left[\int_0^\sigma D d\sigma + \sum_{i=1}^3 \sum_{K=1}^2 S_{i0} S_{K0} \int_0^\sigma S_{i0} S_{K0} D d\sigma \right]. \tag{26}$$

Значения компонент средней скорости $S_{i0}(\sigma)$ и $S_{K0}(\sigma)$, как отмечалось выше, определяется из численного интегрирования бихарактеристической системы уравнений для регулярного луча.

В отсутствие регулярной рефракции, когда среднее направление луча не меняется, вынося произведение $S_{i0} S_{K0}$ из-под интеграла и учитывая, что $|\vec{S}_0| = 1$, для среднего квадрата угла отклонения получим известную формулу [4]

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{4D}{n_0^2} \sigma. \tag{27}$$

В случае нормального падения на неоднородный слой $\vec{S}_0 = (0, 0, S_{0z})$ причем $S_{0z} = 1$, имеем

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{4}{n_0^2(z)} \int_0^z D dz. \tag{28}$$

Формула (28) с учетом различия в коэффициенте диффузии, совпадает с полученной в работе [9]. Вдоль лучевой траектории бихарактеристической системы средний квадрат угла отклонения луча от регулярного направления в трёхмерном случае можно записать в виде

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{2c}{n_0^2} \left\{ \int_0^t D n_0 dt + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \cos \phi_i \cos \phi_j \times \int_0^t D \cdot n_0 \cos \phi_i \cos \phi_j \cdot dt \right\}, \tag{28'}$$

где ϕ_{ij} - углы направляющих косинусов луча, c - скорость света, а t - групповое время распространения сигнала.

В двумерном случае полная система уравнений для численного расчета $\langle \varepsilon^2 \rangle$ в ионосфере имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= cn_0(r, \theta) \cos \phi, \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{cn_0(r, \theta)}{r} \sin \phi, \\
\frac{d\phi}{dt} &= \frac{c}{r^2} \frac{\partial(n_0 r)}{\partial \theta} \cos \phi - \frac{c}{r} \frac{\partial(n_0 r)}{\partial r} \sin \phi, \\
\langle \varepsilon^2 \rangle &= \frac{c}{r^2} \left\{ \int_0^t 3D \cdot n_0 dt + \cos 2(\phi + \theta) \int_0^t Dn_0 \cos 2(\phi + \theta) dt + \right. \\
&\quad \left. + \sin 2(\phi + \theta) \int_0^t Dn_0 \sin 2(\phi + \theta) dt \right\}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Численное интегрирование бихарактеристической системы позволяет получить зависимость среднего квадрата угла отклонения луча $\langle \varepsilon^2 \rangle$ для любой глобально неоднородной модели ионосферы.

На рис. 1, в качестве примера, приведены графики зависимости среднего квадрата угла отклонения луча от высоты для различных углов выхода ϕ_0 . Модельный расчет проводился для сферически-слоистой модели ионосферы с бипараболической зависимостью электронной концентрации от высоты при следующих параметрах однослойной модели: $h_{max} = 300 \text{ км}$ (высота максимума слоя), $f_0/f_{раб} = 0,3$, $D = \text{const}$.

Средний квадрат смещения луча

Проинтегрировав второе уравнение системы (5), мы определили угловые отклонения луча от регулярного направления. Интегрируя первое уравнение этой системы, можно найти пространственные отклонения

$$r_{i1} = \int_0^\sigma S_{i1} d\sigma. \tag{30}$$

Компоненты вектора \vec{S}_1 определяются формулой (18), тогда

$$r_{i1} = \int_0^\sigma \frac{1}{n_0(u)} \int_0^u f_i(t) dt du. \tag{31}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
r_{i1} &= \int_0^\sigma f_i(u) du \cdot \int_0^\sigma \frac{dt}{n_0(t)} - \int_0^\sigma \int_0^u \frac{dt}{n_0(t)} f_i(u) du = \\
&= \int_0^\sigma [L(\sigma) - L(u)] f_i(u) du,
\end{aligned} \tag{32}$$

где $L(u) = \int_0^u \frac{dt}{n_0(t)}$ – групповой путь в плазме.

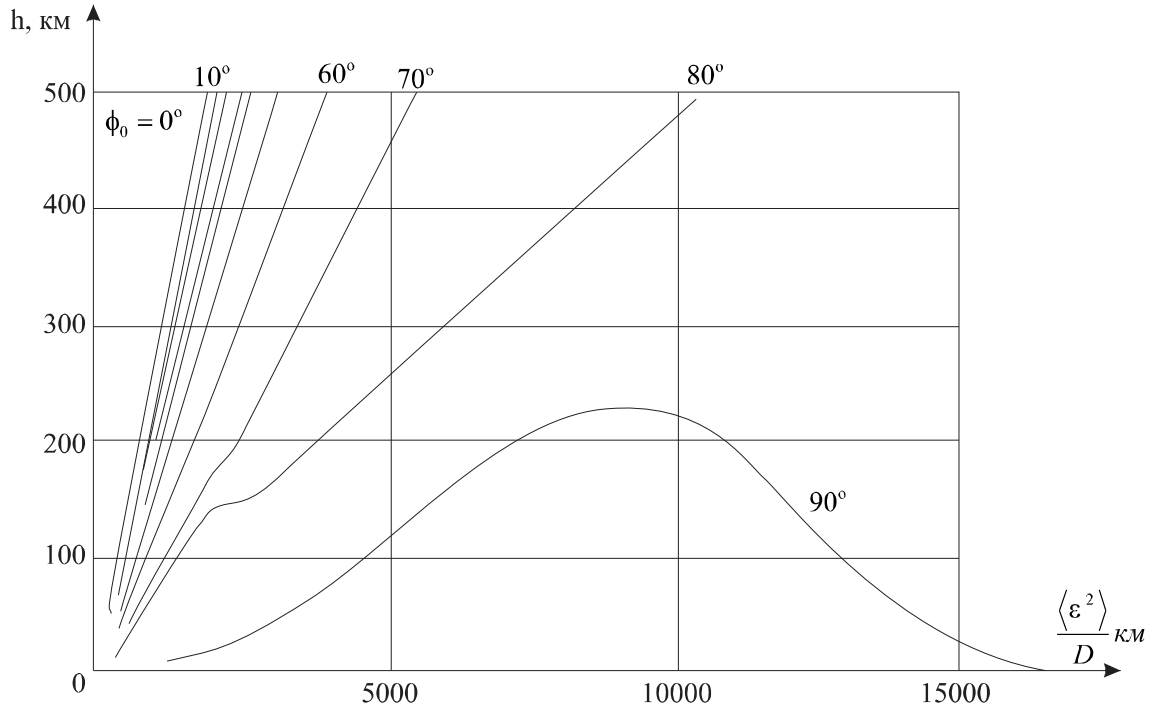


Рис. 1. Зависимость среднего квадрата угла отклонения луча от высоты для различных углов выхода луча из точечного источника

Для моментов второго порядка имеем

$$\langle r_{i1} r_{k1} \rangle = \int_0^\sigma \int_0^\sigma [L(\sigma) - L(u)][L(\sigma) - L(u')] \langle f_i(u) f_k(u') \rangle du du'. \quad (33)$$

Учитывая (10) и интегрируя один раз, получим

$$\langle r_{i1} r_{k1} \rangle = \int_0^\sigma [L(\sigma) - L(u)]^2 C_{ik}(u) du. \quad (34)$$

Коэффициенты C_{ik} определяются по формуле (19).

Найдём средний квадрат полного смещения луча

$$\langle \rho^2 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^3 r_{i1}^2 \right\rangle = 4 \int_0^\sigma [L(\sigma) - L(u)]^2 D du. \quad (35)$$

Для случая плоскослоистой среды аналогичный результат был получен в [15]. Для горизонтально-неоднородной ионосферы с учетом её сферичности из (35) получим зависимость среднего квадрата полного смещения луча вдоль групповой траектории, определяемой при численном решении системы (29) в виде:

$$\langle \rho^2 \rangle = 4c^3 \left\{ t^2 \int_0^t D n_0 dt - 2t \int_0^t D t n_0 dt + \int_0^t D t^2 n_0 dt \right\} \quad (35')$$

Графики зависимости среднего квадрата смещения луча от высоты для различных углов выхода ϕ_0 и сферически-слоистой модели ионосферы приведены на рис. 2. Параметры модели ионосферы те же, что и на рис. 1.

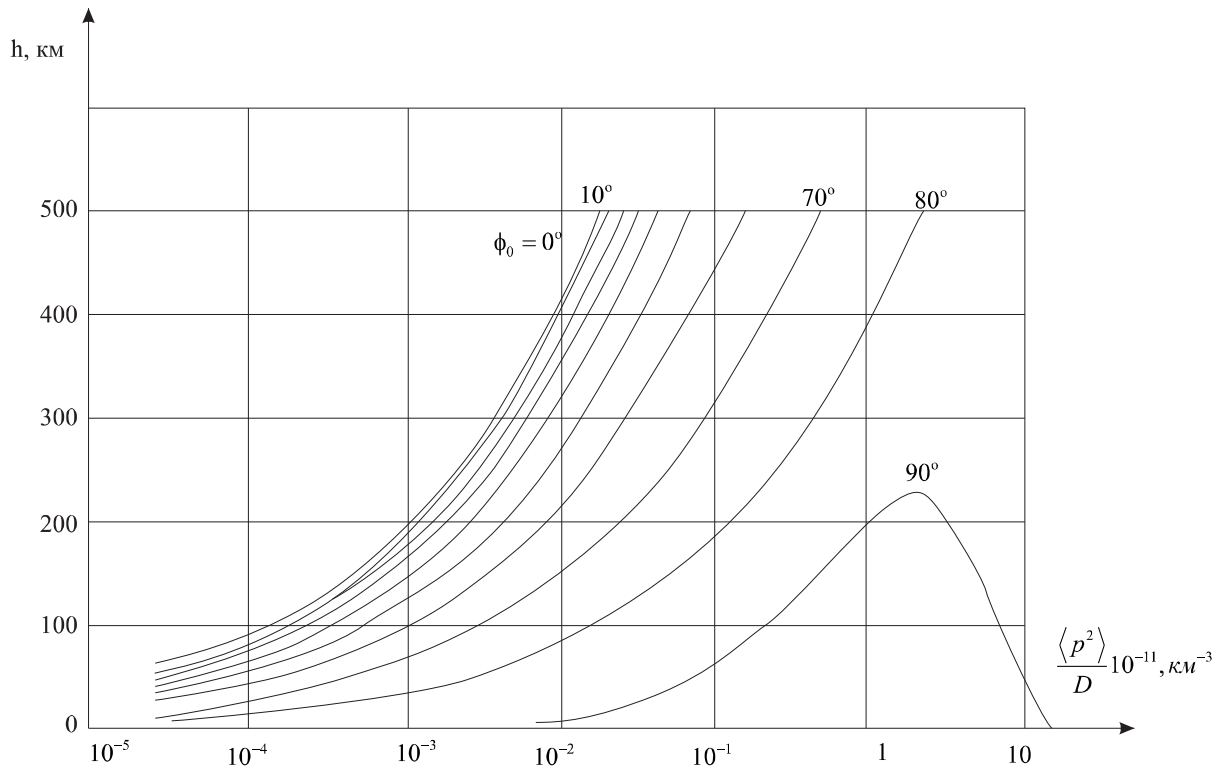


Рис. 2. Зависимость среднего квадрата смещения луча от высоты для различных углов выхода

Область применимости полученных результатов ограничивается условиями применимости геометрической оптики для расчета статистических характеристик поля при учете регулярной рефракции [19]

$$\lambda \ll l; \quad \lambda L \ll l^2, \quad (36)$$

где λ – длина волны, l – масштаб случайной неоднородности, L – групповой путь луча в плазме. Кроме этого, предположение о марковости процесса распространения луча влечёт за собой требование плавности изменения средних характеристик среды

$$l \ll l_1, \quad (37)$$

где $l_1 = \frac{n_0}{|\nabla n_0|}$ – характерный масштаб изменения регулярной неоднородности.

Выводы

В заключении ещё раз отметим, что средние характеристики луча $\bar{S}_0(\sigma)$ и $L(\sigma)$, входящие в выражения (21), (26), (34), (35) определяются из системы уравнения для регулярного луча (29). Таким образом, расчет флуктуации параметров луча в трехмерно неоднородной среде сводится к расчету траекторий в регулярно неоднородной среде. При зависимости характеристик среды более чем от одной координаты система (29) может быть решена лишь численным методом.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 20-12-00299.

Литература

1. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере. // Космические исследования, 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 593–600.

2. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме. // Радиотехника и электроника, М.: Наука. 2012. Т.57. № 9. С. 1028–1034.
3. Эйнштейн А., Смолуховский М., Броуновское движение. ОПТИ, 1936. С. 148.
4. Чернов Л.А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М.: АН СССР, 1958. С. 159; ЖЭТФ, 1953. Т.24. № 2.
5. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966. 403 с.
6. Рытов С.М. Дифракция света на ультразвуковых волнах. // Изв. АН СССР. Сер. физич. 1937. № 2. С. 223.
7. Власова О.К., Гусев В.Д. Флуктуации направления распространения электромагнитных волн в турбулентной гиротропной среде. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1969. № 5.
8. Власова О.К., Гусев В.Д. Статистика лучей в однородной изотропной турбулентной среде с эллипсоидальными неоднородностями. // Геомагнетизм и аэронавигация, 1971. № 3; 1971. № 4.
9. Денисов Н.Г. Рассеяние волн в плоскостной среде. // Изв. вузов. Радиофизика, 1958. Т. 1. № 5–6. С.34.
10. Денисов Н.Г. О флуктуациях амплитуды и фазы волны, прошедшей через слой со случайными неоднородностями. // Изв. вузов. Радиофизика, 1959. Т.2. №2. С. 316.
11. Денисов Н.Г. Дифракция электромагнитных волн в гиротропном слое, содержащем статистические неоднородности. // Изв. вузов. Радиофизика, 1960. Т. 3. №3. С.393; 1960. Т.3. № 4. С. 619.
12. Денисов Н.Г. О влиянии области отражения на рассеяние радиоволн в ионосфере. // Изв. вузов. Радиофизика, 1960. Т. 3. №2. С.208.
13. Денисов Н.Г. О рассеянии волн в условиях полного отражения. // Изв. вузов. Радиофизика, 1964. Т. 7. С.378.
14. Комиссаров В.М. // Изв.вузов. Радиофизика, 1966. Т.9. № 2. С.292.
15. Комиссаров В.М. Кандидатская диссертация. М.: Акустический институт АН СССР. 1966.
16. Гусев В.Д. Рассеяние волн в неоднородном турбулентном слое в геометрооптическом приближении. // Радиотехника и электроника, 1973. Т.18. № 12.
17. Голынский С.М., Гусев В.Д. Статистика лучей в неоднородной изотропной среде. // Радиотехника и электроника, 1976. Т.21. № 3. С.630.
18. Голынский С.М., Гусев В.Д. Траектории лучей в рефрагирующей рассеивающей среде. // Радиотехника и электроника. 1976. Т.21. № 6. С.1303.
19. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967, 548 с.
20. Татарский В.И. Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса. Препринт ООФАГ АН СССР, М., 1970.
21. Татарский В.И. Распространение света в среде со случайными неоднородностями показателя преломления в приближении марковского случайного процесса. // ЖЭТФ, 1969. Т. 56. С. 2106.
22. Кляцкин В.И., Татарский В.И. О приближении параболического уравнения в задачах распространения волн в среде со случайными неоднородностями. // ЖЭТФ, 1970. Т.58, С. 624.
23. Кляцкин В.И., Татарский В.И. Новый метод последовательных приближений в задаче о распространении волн в случайных средах. // Изв. вузов. Радиофизика, 1971, Т. 14, С. 1400.

24. Кляцкин В.И. О пределах применимости приближения марковского случайного процесса в задачах, связанных с распространением света в среде со случайными неоднородностями показателя преломления. // ЖЭТФ, 1969. Т.57, С. 25.