

Уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь

Д.Ш. Ширапов, Г.Б. Итигилов, В.А. Кравченко

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В.

E-mail: shir48@mail.ru

Из общих уравнений Гельмгольца гибридных HE- и EH- электромагнитных волн, распространяющихся в гиротропных направляющих системах (волноводах) с произвольными ортогональными формами поперечного сечения [4], получены частные уравнения Гельмгольца гибридных HE- и EH- волн для гиротропных прямоугольных, круглых и эллиптических волноводов при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь. Полученные частные уравнения Гельмгольца позволяют поставить граничные условия и решить соответствующие краевые задачи для продольно намагниченных гиротропных прямоугольных, круглых и эллиптических волноводов с учетом тепловых потерь.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, электромагнитная волна, гиротропный волновод, продольное намагничивание, тепловая потеря

Helmholtz equations for gyrotropic waveguides with longitudinal magnetization taking into account heat losses

D.Sh. Shirapov, G.B. Itigilov, V.A. Kravchenko

East Siberian State University of Technology and Management

From the general Helmholtz equations of hybrid HE- and EH- electromagnetic waves propagating in gyrotropic guiding systems (waveguides) with arbitrary orthogonal cross-sectional shapes [4], partial Helmholtz equations of hybrid HE- and EH- waves for gyrotropic rectangular, circular and elliptical waveguides with longitudinal magnetization taking into account heat losses are obtained. The obtained partial Helmholtz equations allow us to set boundary conditions and solve the corresponding boundary value problems for longitudinally magnetized gyrotropic rectangular, round and elliptical waveguides taking into account heat losses.

Keywords: Helmholtz equation, electromagnetic wave, gyrotropic waveguide, longitudinal magnetization, heat loss

Введение

Известно, что в сверхвысокочастотных приборах используются ферриты [1, 2]. В то же время из таблицы 1 [3] следует, что в зависимости от материала изготовления в устройствах сверх высоких частот, в том числе в гиротропных волноводах, тангенс угла диэлектрических потерь может принимать значения в диапазоне $(2,5 \div 25) \cdot 10^{-4}$. Следовательно, в гиротропных волноводах в зависимости от материала изготовления могут быть значительные тепловые потери, влияющие на основные параметры таких

волноводов и свойства, распространяющихся в них электромагнитных волн. Этот эффект влияния необходимо исследовать.

Для проведения такого исследования сначала нужно получить частные уравнения Гельмгольца гибридных HE - и EH - электромагнитных волн для гиротропных волноводов с конкретными формами поперечного сечения (прямоугольного, круглого и эллиптического) и при определенных намагничиваниях (продольном, нормальном и касательном) с последующей постановкой граничных условий и решением соответствующих краевых задач.

В работе [4] были получены общие уравнения Гельмгольца для гиротропных направляющих систем с произвольными ортогональными формами поперечного сечения при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь.

Целью данной статьи является получение частных уравнений Гельмгольца для продольно намагниченных гиротропных прямоугольных, круглых и эллиптических волноводов, учитывающих тепловые потери.

Общие уравнения Гельмгольца с учетом тепловых потерь

Из [4] следует, что общие уравнения Гельмгольца гибридных HE - и EH - волн гиротропных направляющих систем с произвольными ортогональными формами поперечного сечения, относительно направления распространения электромагнитных волн, при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь, соответственно, имеют вид

$$\Delta_{11}H_z + \Delta_{22}H_z + \left(\omega^2 \varepsilon' \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j\gamma\omega\varepsilon' \frac{k}{\mu} E_z = 0, \quad (1)$$

$$\Delta_{11}E_z + \Delta_{22}E_z + \left(\omega^2 \varepsilon' \mu_{\perp} - \gamma^2 \right) E_z - j\gamma k \omega \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0, \quad (2)$$

где при продольном намагничивании в тензоре магнитной проницаемости феррита

$$\mu_{33} = \mu_{\parallel}, \quad \mu_{11} = \mu_{22} = \mu, \quad l = m = 0, \quad k \neq 0, \quad \mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}, \quad \mu_{\parallel} \approx \mu_0, \quad \mu = 1 + \frac{Y\mu_0 M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

(E_z, H_z) – продольные компоненты напряженностей электрического и магнитного

полей; $\varepsilon' = \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega}$ – комплексная диэлектрическая проницаемость феррита; ε –

абсолютная диэлектрическая проницаемость феррита; ω – циклическая частота; j – мнимая единица; σ – удельная электрическая проводимость феррита.

Для вывода частных уравнений Гельмгольца гибридных HE - и EH - волн для гиротропных волноводов с конкретными (прямоугольной, круглой, эллиптической) ортогональными формами поперечного сечения при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь воспользуемся общими формулами коэффициентов Ламэ h_i и

символов Кристоффеля Γ_{ij}^i [5]

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x^i} \right)^2}, \quad (3)$$

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial(h_i)}{\partial x^i}; \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial(h_i)}{\partial x^j}; \quad \Gamma_{jj}^i = -\frac{h_j}{h_i^2} \cdot \frac{\partial(h_j)}{\partial x^i}; \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i; \quad \Gamma_{jk}^i = 0 \quad (i \neq j \neq k), \quad (4)$$

где (x, y, z) – декартовы координаты, x^i – ортогональные криволинейные координаты ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3; k=1, 2, 3$), а также дифференциальными операторами 2-го порядка

$$\Delta_{11} = \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \right) \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad (5)$$

$$\Delta_{22} = \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2 \right) \frac{\partial}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Частные уравнения Гельмгольца гибридной *HE* волны

Для вывода частного уравнения Гельмгольца гибридной *HE* волны гиротропного *прямоугольного* волновода при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь из формул (3) и (4) получим коэффициенты Ламэ и символы Кристоффеля в декартовой системе координат ($x^1 = x; x^2 = y; x^3 = z$)

$$\begin{cases} h_1 = h_2 = h_3 = 1; \\ \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^1 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Тогда дифференциальные операторы второго порядка (5) и (6) с учетом (7) примут вид

$$\begin{cases} \Delta_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \\ \Delta_{22} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (8)$$

Подставив (8) в общее уравнение (1) получим частное уравнение Гельмгольца гибридной *HE* волны для гиротропного *прямоугольного* волновода при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \left(w^2 \varepsilon' \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j \gamma w \varepsilon' \frac{k}{\mu} E_z = 0. \quad (9)$$

Для вывода частного уравнения Гельмгольца гибридной *HE* волны гиротропного *круглого* волновода при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь из формул (3) и (4) получим коэффициенты Ламэ и символы Кристоффеля в цилиндрической системе координат ($x^1 = r; x^2 = \varphi; x^3 = z$)

$$\begin{cases} h_1 = h_3 = 1; h_2 = r; \\ \Gamma_{12}^1 = 0; \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда дифференциальные операторы второго порядка (5) и (6) с учетом (10) примут вид

$$\begin{cases} \Delta_{11} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \\ \Delta_{22} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{cases} \quad (11)$$

Подставив (11) в общее уравнение (1) получим уравнение Гельмгольца гибридной *HE* волны для гиротропного *круглого* волновода при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \left(w^2 \varepsilon' \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j \gamma w \varepsilon' \frac{k}{\mu} E_z = 0. \quad (12)$$

Переходя к выводу частного уравнения Гельмгольца гибридной HE волны для гиротропного *эллиптического* волновода при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь. Из формул (3) и (4) получим коэффициенты Ламэ и символы Кристоффеля в эллиптической системе координат ($x^1 = \xi$; $x^2 = \varphi$; $x^3 = z$)

$$\begin{cases} h_1 = h_2 = ed; & h_3 = 1; \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{\sin 2\xi}{2d^2}; & \Gamma_{21}^2 = \frac{\sin 2\xi}{2d^2}, \end{cases} \quad (13)$$

где e - фокус эллипса; $d^2 = ch^2 \xi - \cos^2 \varphi$.

Тогда дифференциальные операторы второго порядка (5) и (6), входящие в общее уравнение (1), с учетом (13) принимает вид

$$\begin{cases} \Delta_{11} = \frac{1}{e^2 d^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}; \\ \Delta_{22} = \frac{1}{e^2 d^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{cases} \quad (14)$$

Подставив (14) в общее уравнение (1) получим частное уравнение Гельмгольца гибридной HE волны для гиротропного *эллиптического* волновода при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left(w^2 \varepsilon' \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j e^2 d^2 \gamma w \varepsilon' \frac{k}{\mu} E_z = 0. \quad (15)$$

Частные уравнения Гельмгольца гибридной EH волны

Для вывода частного уравнения Гельмгольца гибридной EH волны для гиротропного *прямоугольного* волновода при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь подставим, дифференциальные операторы второго порядка (8) в общее уравнение Гельмгольца (2), тогда получим

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\omega^2 \varepsilon' \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - j \gamma \omega \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0. \quad (16)$$

Подставив, дифференциальные операторы второго порядка (11) в общее уравнение (2) получим частное уравнение Гельмгольца гибридной EH волны для гиротропного *круглого* волновода при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + (\omega^2 \varepsilon' \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - j \gamma \omega \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0. \quad (17)$$

Далее подставив, дифференциальные операторы второго порядка (14) в общее уравнение Гельмгольца (2) получим частное уравнение Гельмгольца гибридной EH волны для гиротропного *эллиптического* волновода при продольном намагничивании с учетом тепловых потерь

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 (\omega^2 \varepsilon' \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - j e^2 d^2 \gamma \omega \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0. \quad (18)$$

Выводы

Из общих уравнений Гельмгольца, полученных в работе [4], для *HE*- волны (1) и *EH*- волны (2) выведены соответствующие частные уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с учетом тепловых потерь при продольном намагничивании относительно направления распространения электромагнитных волн:

1. Для прямоугольных волноводов – уравнения Гельмгольца гибридных *HE*- волны (9) и *EH*- волны (16);
2. Для цилиндрических волноводов – уравнения Гельмгольца гибридных *HE*- волны (12) и *EH*- волны (17);
3. Для эллиптических волноводов – уравнения Гельмгольца гибридных *HE*- волны (15) и *EH*- волны (18).

Литература

1. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах – Л.: Госэнергоиздат, 1963. 664 с.
2. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны – М.: Физматлит, 1994. 464 с.
3. Устинов А., Кочемасов В., Хасьянова Е. Ферритовые материалы для устройств СВЧ-электроники. Основные критерии выбора // СВЧ-электроника. 2015. № 8. С. 86-92.
4. Ширапов Д.Ш., Итигилов Г.Б., Кравченко В.В. Обобщенные и общие уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов с учетом тепловых потерь // Материалы Всероссийской открытой научной конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн, г. Муром, 28-30 июня 2022 г., с. 61-66. DOI: 10.24412/2304-0297-2022-1-61-66
5. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш. Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в гиротропных волноводах // Улан-Удэ: Издательство Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления. 2022. 154 с.