УДК 517.598 DOI: 10.24412/2304-0297-2024-1-140-144

Математические методы исследования резонансного рассеяния на сферических диэлектрических частицах

Ю.В. Шестопалов

Российский Технологический Университет МИРЭА
119454, г. Москва, пр. Вернадского 78.
E-mail: shestopalov@mirea.ru

Представлены результаты разработки математических методов, обеспечивающих точное решение многопараметрических обобщенных дисперсионных уравнений (ОДУ) электромагнетизма в комплексной области, в том числе для задач резонансного рассеяния сферическими диэлектрическими частицами. Разработанный численно-аналитический подход позволяет доказать существование и получать резонансные частоты без вычислений для широкого семейства структур планарной, круговой и сферической симметрий. В методе используются анализ функций нескольких комплексных переменных, применение неявных отображений и решение начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с заданной точностью.
Ключевые слова: резонанс, рассеяние, неявная функция, комплексная область, сферические диэлектрические частицы

Mathematical methods for the analysis of resonance scattering by spherical dielectric particles

Y.V. Shestopalov

[1] *Russian Technological University MIREA.*

The results are presented of the development of mathematical methods providing exact solution to multiparameter generalized dispersion equations (GDEs) of electromagnetics in the complex domain associated in particular with the resonance wave scattering by spherical dielectric particles. The elaborated numerical-analytical approach enables one to obtain resonance frequencies without computations for a broad family of planar-, circular-, and spherical-symmetric structures and employs analysis of functions of several complex variables, application of implicit mappings and solution to initial-value problems with prescribed accuracy.
Keywords: resonance, scattering, implicit function, complex domain, spherical dielectric particles

Введение

Определение резонансных частот (РЧ) для широкого класса задач рассеяния сводится $[1-3]$ к решению *обобщенных дисперсионных уравнений* (ОДУ) вида

$$G(\boldsymbol{\varpi}) = 0, \qquad \boldsymbol{\varpi} = (w; \mathbf{u}),$$

где w – комплексный частотный спектральный параметр;

$\mathbf{u} = \{u\}_{j=1}^{N}$ – вектор $N \geq 1$ неспектральных параметров (определяющих материальное заполнение и геометрию рассеивателя).

Математически корректно, с точки зрения теории функций нескольких комплексных переменных и неявных комплекснозначных отображений, задача решения ОДУ сводится к определению неявных функций (гиперповерхностей) $w = w(\mathbf{u})$. Если варьировать только один параметр $\zeta = u_{j_0}$, как это обычно происходит в прикладных исследованиях, то целью является определение неявных комплексных отображений $w = Z(\zeta)$ — зависимостей спектра РЧ от комплексной переменной ζ.

Алгоритм расчета РЧ должен базироваться на возможности корректного сведения задачи к решению функционального или операторного ОДУ. В частности, этот алгоритм может быть основан на анализе коэффициентов разложения в представлениях рассеянного поля вне круга, содержащего сечение металлодиэлектрического рассеивателя, в виде обобщенного ряда Фурье по уходящим цилиндрическим гармоникам

$$p(\rho,\theta) = \sum_n \; T_n(\boldsymbol{\varpi})\, H_n^{(1)}(k_0\rho)e^{in\theta},$$

где (ρ,θ) – комплексный частотный спектральный параметр;

k_0 – волновое число вакуума;

$H_n^{(1)}$ – функции Ханкеля первого рода порядка n;

$p(\rho,\theta)$ – потенциальная компонента рассеянного поля.

Отметим, что такой подход развивался многими авторами, в том числе в [4] и в работах, цитируемых в этой публикации.

Особенности $T_n(\boldsymbol{\varpi})$ могут классифицироваться как резонансы рассеивающей структуры. Если рассеиватель обладает радиальной симметрией и кусочно-постоянным диэлектрическим заполнением, то коэффициенты разложения можно представить в явном виде как отношения $T_n(\boldsymbol{\varpi}) = \tau_n(\boldsymbol{\varpi})/\chi_n(\boldsymbol{\varpi})$ обобщенных цилиндрических полиномов [5], которые вычисляются явно [1, 2]. Обращение в нуль числителя или знаменателя T_n означает [1] соответственно подавление n-й гармоники или резонанс рассеянного поля.

Резонансное рассеяние на сферических диэлектрических частицах является предметом активных исследований уже более 150 лет, начиная с классических работ лорда Рэлея. Многие результаты были обобщены в монографии [6]. Однако до сих пор, насколько нам известно, не были получены *строгие* доказательства существования РЧ и не изучено их расположение на комплексной плоскости. В [6, 7] и многих других работах анализ свойств РЧ и резонансного рассеяния проводится только на основе результатов, полученных путём численного решения уравнений в комплексной области с использованием коммерческих кодов без обоснования существования корней этих уравнений и исследования их расположения на комплексной плоскости. Такой подход конечно недостаточен для построения математически завершённой теории резонансного рассеяния на диэлектрических частицах и требует соответствующего развития. В настоящей работе такие доказательства проведены по-видимому впервые с использованием метода, основанного на анализе *критических реперных точек* (КРТ).

Расчет РЧ в терминах $w(\mathbf{u})$ и $Z(\zeta)$ проводится путем численного решения соответствующих задач Коши для искомых неявных функций с начальными данными, задаваемыми КРТ, которые определяются явно. Последнее является необходимым условием эффективного применения описанного метода вычисления и реализуется на практике для широкого класса структур, обладающих координатной симметрией.

Для простейшего рассеивателя — однородного кругового диэлектрического цилиндра — ОДУ имеет вид [1, 2]

$$G(\boldsymbol{\varpi}) \equiv \alpha H_n^{(1)}(w)J_n(\alpha w) - H_n^{(1)}(\alpha w)J_n(w) = 0, \qquad \boldsymbol{\varpi} = (w;\alpha),$$

с левой частью в виде обобщённого цилиндрического полинома, а КРТ определяются явно как

$$(w;\alpha) = (w^*;\alpha^*) = \left[h_m^{(1)},\, \nu_s^n/h_m^{(1)}\right],$$

где $w = k_0 a$ – комплексный частотный спектральный параметр;

a – радиус диэлектрического цилиндра;

ϵ, $\alpha = \sqrt{\epsilon}$ – диэлектрическая проницаемость и коэффициент преломления диэлектрика;

ν_m^n и $h_m^{(1)}$ – нули функций Бесселя J_n и Ханкеля $H_n^{(1)}$.

Для многослойных радиально-симметричных структур КРТ также вычисляются явно как отношения произведений нулей цилиндрических функций.

Полученные явно без вычислений значения РЧ кругового диэлектрического цилиндра в терминах КРТ сами по себе имеют физический смысл, так как позволяют интерпретировать КРТ как ’’суперпозицию" резонансов внутренней и внешней областей рассеивателя.

РЧ, полученные в явном виде и рассматриваемые как неявные функции (отображения) одного или нескольких комплексных параметров, обобщают понятие дисперсионных кривых — зависимостей РЧ от одного вещественного параметра — и являются способом описания топологии спектра РЧ на комплексной плоскости и динамики изменения РМ в зависимости от параметров.

Результаты $[1-3]$ показывают, что исследование такой динамики может раскрыть ранее не изученные свойства спектра и найти важные приложения в анализе резонансного рассеяния.

Математические методы анализа ОДУ для сферической диэлектрической частицы

Изложенная методика эффективно применяется для анализа и определения РЧ сферической диэлектрической частицы. Эта задача сводится $[6,7]$ к решению уравнения

$$S_n(w) \equiv \epsilon \frac{d}{dw}\left[w h_n^{(1)}(w)\right] j_n(\alpha w) - \frac{d}{dz_1}[z_1 j_n(z_1)] h_n^{(1)}(w) = 0, \qquad (1)$$

где $w = k_0 R$ – комплексный частотный спектральный параметр;

R – радиус сферической диэлектрической частицы;

ϵ – диэлектрическая проницаемость, $\alpha = \sqrt{\epsilon\mu}$ (далее в данной работе будем предполагать, что $\mu = 1$) и $z_1 = \alpha w$;

j_n и $h_n^{(1)}$ – сферические функции Бесселя первого и третьего рода.

После преобразований уравнение (1) сводится при $n = 1$ к решению эквивалентного уравнения с левой частью в виде обобщённого тригонометрического полинома [5]

$$\tilde{T}_1(w;\epsilon) \equiv A^{(1)}(w;\epsilon)\sin(\alpha w) + B^{(1)}(w;\epsilon)\cos(\alpha w) = 0, \qquad (2)$$

$$A^{(1)}(w;\epsilon) = i\epsilon\, g(w) + 2(w-i)(\epsilon w^2 - 1),$$

$$B^{(1)}(w;\epsilon) = \alpha w[-i\epsilon\, g(w) - w + i], \;\; g(w) = w^2 - iw - 3, \;\; i^2 = -1.$$

Уравнения (1) и (2) определяют $w = w(\epsilon)$ или $w = w(\alpha)$ как неявные функции параметра ϵ или α. Можно показать, что функция $w(\epsilon)$ (или $w = w(\alpha)$) существует и ее (то есть искомые комплексные РЧ сферической диэлектрической частицы) можно вычислить с заданной точностью, так как известны КРТ $(w^*;\epsilon^*)$, при которых $\tilde{T}_1(w^*;\epsilon^*) = 0$. Эти КРТ можно найти явно из (а) вида уравнения (1):

$$w^* = i, \;\; \epsilon^* = -(\xi_s^{(1)})^2, \quad s = 1,2,\dots \; (\text{при } n = 1),$$

$\xi_s^{(1)}, s = 1,2,\dots,$ обозначают нули сферических функции Бесселя $j_1(z)$ первого рода; и (б) из вида уравнения (2),

$$\alpha w = \frac{\pi}{2}(2k+1), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$P_k^{(A)}(w) \equiv 2w^3(a_k - 1) + w^2 i(2 - a_k) + w a_k - 3i a_k = 0,$$

или

$$\alpha w = \pi n, n = \pm 1, \pm 2, \dots, \qquad P_n^{(B)}(w) \equiv w^3 + w^2 i(b_n - 1) + w b_n - 3i b_n = 0.$$

Можно показать, что полиномы $P_k^{(A)}(w)$ и $P_n^{(B)}(w)$ имеют для каждого $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ один чисто мнимый нуль ($p = 1$ в Таблице 1 для $P_k^{(A)}(w)$)

на отрицательной мнимой полуоси и два комплексных нуля ($p = 2,3$ в Таблице 1), расположенных симметрично в первом и втором квадрантах комплексной плоскости w.

Таким образом, можно явно определить счётные совокупности РЧ как КРТ. Вычисленные значения этих нулей — искомых комплексных РЧ индекса $n = 1$ сферической диэлектрической частицы для случая (а) и $k = 0$ и соответствующие согласно представлениям КРТ значения проницаемости ϵ — представлены в Таблице 1. Отметим, что для $p = 1$ РЧ в Таблице 1 определяют колебания, потенциальная компонента рассеянного поля которых экспоненциально растёт на бесконечности, а для $p = 2,3$ убывает и удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда.

Материалы с проницаемостями из Таблицы 1, вычисленными согласно значениям КРТ, могут быть классифицированы как специальный класс диамагнетиков. Однако в данном случае важны не сами значения КРТ как таковые, а КРТ в качестве точных начальных значений для последующего вычисления РЧ в физически оправданном диапазоне изменения проницаемости, то есть определение РЧ на соответствующем интервале изменения ϵ.

Действительно далее, РЧ – искомая неявная функция $w = w(\epsilon)$ параметра ϵ – вычисляются как решение задачи Коши в комплексной области; например, при $n = 1$ эта задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{d\epsilon} = f(w;\epsilon), \qquad -\left(\xi_s^{(1)}\right)^2 < \epsilon < E_0, \\ w\left(-\left(\xi_s^{(1)}\right)^2\right) = i, \end{cases} \qquad f(w;\epsilon) = -\frac{\dfrac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \epsilon}}{\dfrac{\partial \tilde{T}_1}{\partial w}}, \qquad s = 1, 2, 3, \tag{3}$$

и решается на некотором интервале $(-\left(\xi_s^{(1)}\right)^2, E_0)$ изменения параметра ϵ с начальными условиями в КРТ, полученных из условий (а), как задача (3), или (б).

Решения задач Коши (3) существуют в окрестности начальной точки $\epsilon = -\left(\xi_s^{(1)}\right)^2$, так как выполняется условие её однозначной разрешимости $\frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial w}\left(-\left(\xi_s^{(1)}\right)^2, i\right) \neq 0$, и определяют искомые неявные функции, которые являются решениями уравнения $\tilde{T}_1(w;\epsilon) = 0$ при $\epsilon \in \left(-\left(\xi_s^{(1)}\right)^2, E_0\right)$.

Наличие КРТ и однозначная разрешимость задач Коши для определения неявных функций $w = w(\epsilon)$ или $w = w(\alpha)$ образует в совокупности строгое доказательство существование РЧ и позволяет найти их расположение на комплексной плоскости.

Приближённое вычисление неявной функции $w = w(\epsilon)$ как решения (3) проводится с использованием метода Рунге-Кутта при параметризации вещественной переменной ϵ, исходящей из реперной точки $\epsilon = -(\xi_s^{(1)})^2$, расположенной на вещественной оси комплексной плоскости ϵ. Задавая значение $E_0 > 1$ можно в результате расчетов вычислить РЧ в конечной точке интервала изменения проницаемости для диэлектриков без потерь.

Таблица 1. Комплексные РЧ индекса $n = 1$ сферической диэлектрической частицы для случая (а) и $k = 0$ и соответствующие КРТ-значения проницаемости ϵ

p	РЧ	Значения проницаемости ϵ
1	$-1.50775i$	-1.085378
2	$-0.988990 + 0.833506i$	$0.249854 + 1.453667i$
3	$0.988990 + 0.833506i$	$0.249854 - 1.453667i$

Выводы

Разработан численно-аналитический метод расчета РЧ диэлектрических структур планарной, круговой и сферической симметрий, основанный на точном решении многопараметрических ОДУ в комплексной области. Специальные исследования проведены для задач резонансного рассеяния сферическими диэлектрическими частицами. Получены строгие доказательства существования РЧ и изучено их расположение на комплексной плоскости.

Развитый численно-аналитический подход позволяет находить КРТ и РЧ в явном виде для широкого семейства структур, в том числе путём численного определения РЧ как неявных функций — решений соответствующих начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с заданной точностью. В этом качестве разработанные методы исследования ОДУ существенно расширяют математический и вычислительный аппарат известных коммерческих продуктов и программных кодов и могут быть использованы для обоснования достоверности результатов и повышения эффективности расчетов.

Для проведения вычислений РЧ как неявных функций с заданной точностью предлагается применять численное решение задач Коши методами Рунге-Кутта высокого порядка. Такие методы после их внедрения могут также существенно дополнить имеющиеся программные коды исследования задач электромагнетизма.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 20-11-20087.

Литература

1. Y. Shestopalov, Cloaking: analytical theory for benchmark structures (2021), J. Electr. Waves Appl.. 35, 485-510.
2. Y. Shestopalov, Resonance Scattering by a Circular Dielectric Cylinder (2021), Radio Science, 56, e2020RS007095.
3. Y. Shestopalov, Application of Parametric Fourier Series to the Analysis of Partial Invisibility and Resonance Scattering by Canonical Structures, Proc. 2022 IEEE Int. Conf. on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA 2022), 5-9 September 2022, Cape Town, South Africa, 47-50.
4. Анютин А.П. Плазмонные резонансы в выпукло-вогнутом наноцилиндре из серебра // Радиотехника и Электроника. 2021. Т. 66. № 6. С. 559–564.
5. Y.Shestopalov, Trigonometric and cylindrical polynomials and their applications in electromagnetics (2019), Applicable Analysis, 99, 2807-2822.
6. Климов В.В. Наноплазмоника – М.: Физматлит, 2009. 235 с.
7. V. V. Klimov, A. R. Bekirov, B. S. Lukyanchuk, Trapped modes in particles with a negative refractive index (2023), Optics Letters, 48, 5795-5798.