

**Математическое моделирование распространения и фокусировки волн КВ диапазона в межслоевом ионосферном волноводе при дифракционном возбуждении волноводного канала**

Е.Б.Ипатов<sup>1,2</sup>, Е.А. Палкин<sup>2</sup>, А.А. Петрович<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Московский физико-технический институт (ГУ МФТИ)  
141701, г. Долгопрудный Моск. Обл., институтский пер., 9.*

*E-mail: aapetrovich@bk.ru*

<sup>2</sup> *Российский новый университет (РосНОУ)*

*105005, г. Москва, ул. Радио, 22.*

*E-mail: [palkin@rosnou.ru](mailto:palkin@rosnou.ru)*

*Представлены результаты математического и численного моделирования распространения радиоволн КВ- диапазона в межслоевом ионосферном канале при его возбуждении за счет эффекта частичного просачивания волны через нижележащий ионосферный слой. Моделирование структуры волнового поля выполнено на основе асимптотического решения задачи в форме канонического оператора Маслова (КОМ). Данный подход позволяет провести анализ областей фокусировки, возникающих в неоднородной ионосферной плазме, как для падающего на ионосферный слой поля, возбуждающего канал, так и поля волны, просачивающейся и удерживаемой в межслоевом канале. Приводятся результаты расчетов дифракционной структуры волновых полей и их сопоставление с особенностями геометрии лучевых семейств.*

*Ключевые слова: ионосфера, межслоевой ионосферный канал, лучевые структуры, канонический оператор Маслова, асимптотические решения, подбарьерное просачивание волны.*

**Mathematical modeling of propagation and focusing of HF waves in an interlayer ionospheric waveguide during diffraction excitation of a waveguide channel**

E.B. Ipatov<sup>1,2</sup>, E.A. Palkin<sup>2</sup>, A.A. Petrovich<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Moscow Institute of Physics and Technology (GU MIPT).*

<sup>2</sup> *Russian New University (RosNOU).*

*The results of mathematical and numerical modeling of the propagation of HF radio waves in an interlayer ionospheric channel during its excitation due to the effect of partial wave percolation through the underlying ionospheric layer are presented. The modeling of the wave field structure is based on the asymptotic solution of the problem in the form of Maslov canonical operator (MCO). This approach makes it possible to analyze the focus areas that arise in an inhomogeneous ionospheric plasma, both for the field incident on the ionospheric layer exciting the channel and the field of the wave seeping and retained in the interlayer channel. The results of calculations of the diffraction structure of wave fields and their comparison with the features of the geometry of ray families are presented.*

*Keywords: ionosphere, interlayer ionospheric channel, ray structures, Maslov canonical operator, asymptotic solutions, sub-barrier wave percolation.*

**Введение**

В предшествующих работах [1-5] было показано, что при дифракционном возбуждении межслоевого ионосферного канала в КВ диапазоне радиоволн, волна, сформированная в волноводном канале, может быть значимой по амплитуде и обладать

незначительным ослаблением при распространении в канале. При этом отмечалось, что пространственное распределение волнового поля сильно неоднородно и имеет выделенные зоны локализации поля, связанные как с оптимальными условиями прохождения волны через слой, так и с областями фокусировки этой волны [5].

В данной работе на основе численного моделирования пространственной структуры волновых полей, выполненного в рамках метода канонического оператора В.П.Маслова (КОМ) [6-8] и его модификации для связанных многообразий [4,5], получены распределения волнового поля в областях, удовлетворяющих как оптимальным условиям «запитки» волноводного канала, так и условиям фокусировки волны в канале. Предварительное выделение таких пространственных областей осуществляется в рамках анализа структуры лучевых семейств, соответствующих многообразиям падающей, отраженной и просачивающейся в канал волнам.

### 1. Структура лучевых семейств в задаче дифракционного возбуждения ионосферного волноводного канала

Разработанные алгоритмы построения лагранжевых многообразий нулевого уровня гамильтонианы волнового уравнения, на основе которых строится КОМ, используют численные решения бихарактеристической (лучевой) системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [9-11]. Для моделирования межслоевого ионосферного канала использовалась полуэмпирическая модель Б.К.Чинга и Е.Т.Чиу [12,13], задающая пространственное распределение электронной плотности, удовлетворительно описывающее реальное распределение ионизации в земной ионосфере. Модель описывает высотное распределение  $Ne(h)$  в виде суммы модифицированных слоев Чепмена:

$$Ne_i(h) = Ne_{iMax} \exp\left\{\sigma_i \left(1 - \rho_i - \exp(-\rho_i)\right)\right\}, \quad (1)$$

параметры которых являются функциями географической широты, геомагнитной широты и долготы, местного времени и даты, солнечной активности. Вычислительный эксперимент проводился с целью исследования условий формирования ионосферных волновых каналов, поэтому параметры модели (1) выбирались исходя из представлений о канале, возникающем между слоями E и F. Частота радиоволны выбиралась из условия существования критического отражения от слоя E (в пространственном спектре излученных волн) и полным отражением от слоя F2.

Указанные выше условия реализуются для частоты радиоволны  $f = 4,5$  МГц при моделировании пространственного распределения электронной плотности четырехслойной моделью (1) (индексы  $i=1,2,3,4$  относятся к ионосферным слоям D, E, F1, и F2, соответственно). При этом  $Ne_{iMax}$  – электронная плотность в максимуме  $i$ -го

слоя, ей соответствует критическая частота слоя  $f_i [МГц] = \sqrt{80,8 \cdot 10^{-6} Ne_{iMax} [см^{-3}]}$ .

Для проведенного исследования критические частоты слоев задавались следующим набором значений:  $f_i = (0, 2; 2, 5; 3, 4; 6, 43) МГц$ . При данных соотношениях частот обеспечивалась «полупрозрачность» слоя E и отражение от слоя F2. Остальные параметры, детализирующие высотный профиль электронной плотности (1) были выбраны следующими:

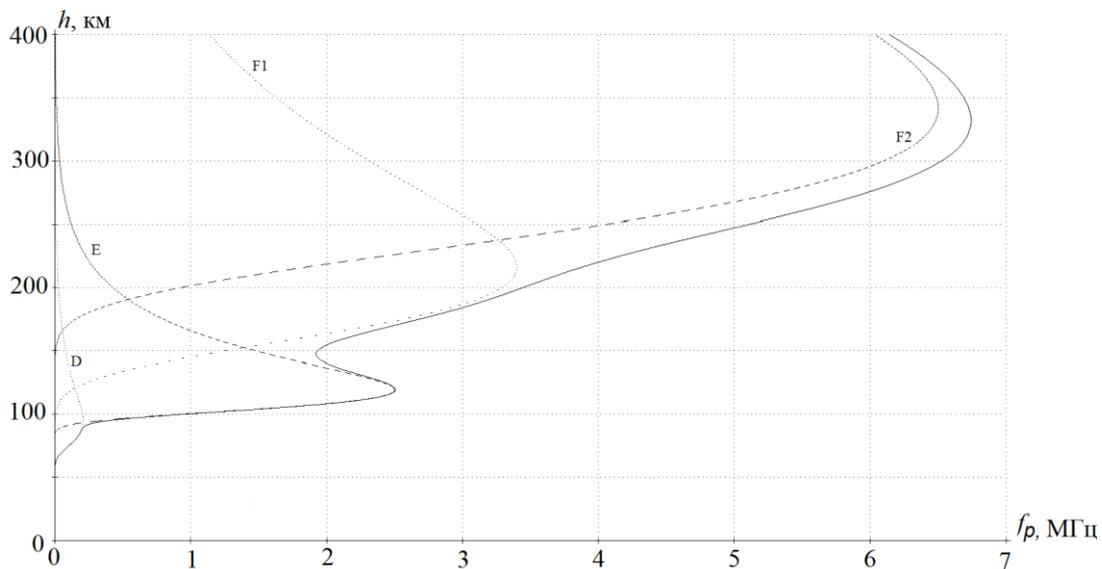
$$\rho_i = \frac{h - h_i}{a_i}, \text{ приведенная относительная высота в } i\text{-м слое;}$$

$a_i$ , - масштаб («полутолщина») и  $h_i$  - высота максимума ионизации соответствующего слоя, где  $h_i = (94,6; 119,3; 216,2; 341,9) \text{ км}$ ,  $a_i = (11,4; 10,0; 34,2; 42,0 + 0.16 * h) \text{ км}$ ;

$\sigma_i$  - константа модели (1), заданная для каждого слоя,  $\sigma_i = (0,5; 0,48; 0,48; 1,0)$ .

При выбранных характеристиках модели высотный профиль  $Ne(h)$  имеет минимум на высоте 150 км, а значит, возможно формирование ионосферного волноводного канала. Соответствующий высотный профиль плазменной частоты  $f_p(h) [\text{МГц}] = \sqrt{80,8 * 10^{-6} Ne(h) [\text{см}^{-3}]}$  представлен на рис. 1.

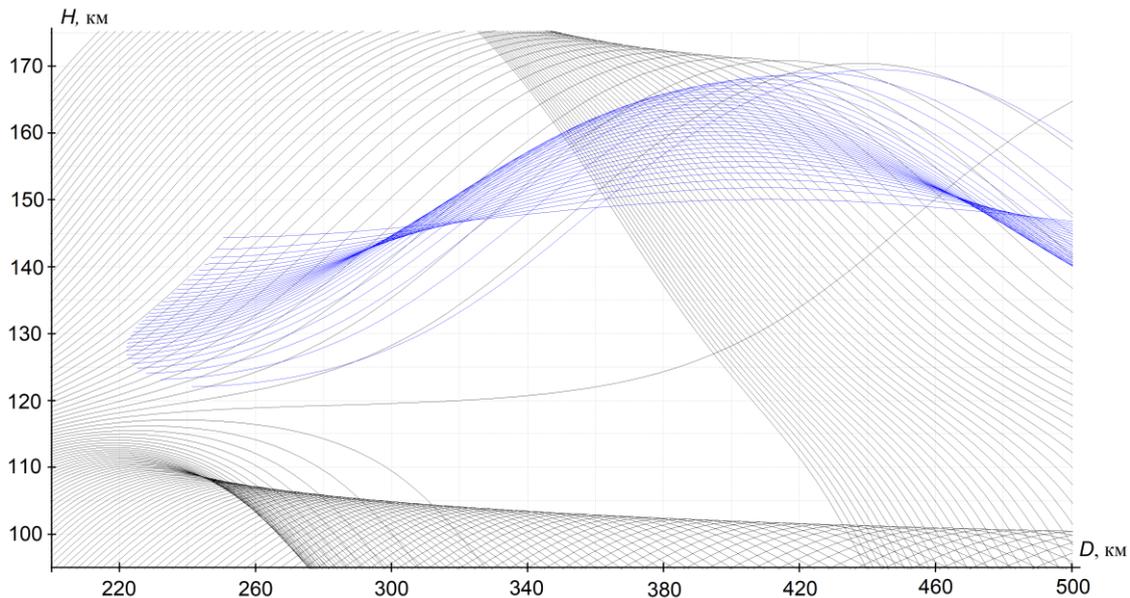
Лучевая структура распространения волн для данной задачи при использовании показателя преломления в приближения холодной, изотропной плазмы строилась в соответствии с алгоритмами, описанными в [9,10]. Для расчета семейства лучей, отвечающих волне, попадающей в канал вследствие частичного просачивания через слой E (эффект подбарьерного прохождения) использовались начальные данные, предложенные в [2,3]. Таким образом, на графиках рисунка 2 и рисунка 3 приведены две конгруэнции лучей: «основная» (отображена черным цветом), отвечающая волне, излученной наземным источником и распространяющейся в неоднородной ионосферной плазме в соответствии с классическими законами рефракции, и «дифракционная» конгруэнция лучей (отображена синим цветом), соответствующая условиям перехода волны с минимальным ослаблением через «плазменный барьер» слоя E. При этом формируется межслоевой волноводный канал на высоте  $h \approx 150 \text{ км}$ . Эти две лучевые конгруэнции соответствуют двум связанным многообразиям, на которых строится асимптотическое решение в форме КОМ [3-5].



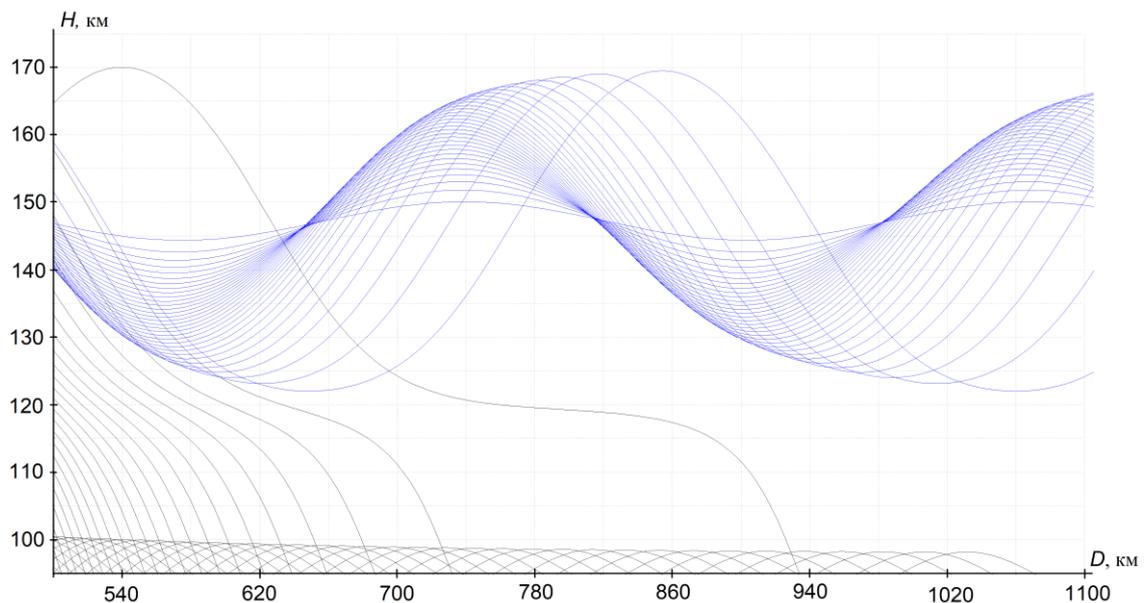
**Рис. 1. Модельный профиль высотного распределения плазменной частоты и вклад отдельных слоев.**

На рис.2. представлены лучевая структура этих многообразий в пространственной области, где происходит «запитка» ионосферного канала, формирование «дифракционного» многообразия (дальность по поверхности  $D \approx 220 - 260 \text{ км}$ ). На рис.3 представлены лучевая структура и области фокусировки волны, распространяющейся в межслоевом канале. Как видно из приведенных графиков,

области фокусировки основной конгруэнции и «дифракционной» конгруэнции лучей во многих областях перекрываются. С позиции метода КОМ в данной задаче необходимо рассматривать канонические карты обоих семейств для корректного описания сложного интерференционного поля. Кроме того, следует учитывать значительное различие в амплитудах интерферирующих полей и нарушение их взаимной когерентности при значительных разностях в траекториях распространения волн, относящихся к различным семействам. Графики 2 и 3 приведены в системе координат: высота над поверхностью Земли  $h_{км}$  и дальность  $D_{км}$  вдоль земной поверхности.



**Рис. 2. Лучевая структура формирования межслоевого волноводного канала на основе эффекта частичного просачивания волны.**



**Рис. 3. Лучевая структура волны, канализируемой межслоевым ионосферным каналом.**

## 2. Пространственная структура волнового поля при дифракционном возбуждении межслоевого ионосферного канала

Как видно из рисунков 2 и 3, в рассматриваемой задаче поле волны, попадающей в ионосферный канал, и поле падающей на ионосферу волны характеризуется многочисленными зонами фокусировки. По этой причине при моделировании структуры волнового поля использовался метод КОМ, и, в частности, в решении использовались особые канонические карты и, соответственно, интегральные формы локального канонического оператора.

Формально асимптотическое решение задачи о возбуждении волноводного канала может быть представлено стандартной формой КОМ [6,7]:

$$\psi_{asympt}(\vec{r}) = \sum_{j=1,2} \left[ \sum_{kj} \hat{K} \varphi \Big|_{U_{kj}} \right], \quad (2)$$

где искомая функция пространственных координат  $\psi_{asympt}(\vec{r})$  описывает амплитуду волнового поля в декартовой системе  $\vec{r} = (x, y, z)$  как сумму локальных интерферирующих полей, присутствующих в точке наблюдения,

$U_{kj}$  - карта канонического атласа, относящаяся к атласу одного из указанных выше многообразий  $\Gamma_j(\vec{p}_j, \vec{q}_j)$ ;  $j=1,2$  и покрывающая некоторую окрестность исследуемой точки  $\vec{r}$ .

Здесь и далее мы считаем, что подмногообразие с индексом 1 соответствует лучевой конгруэнции падающей на ионосферный слой волны («основная волна»), а с индексом 2 – волны, возникающей в волноводном канале вследствие эффекта подбарьерного просачивания.

Характеристики КОМ и входящие в него функции строятся на каждом из связанных многообразий в смешанной, координатно-импульсной системе канонических переменных:  $\vec{q} = \vec{r} = (x, y, z)$ ,  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ , где наряду с пространственными координатами используются координаты сопряженного импульсного пространства – нормированные компоненты волнового вектора. Каждое из слагаемых в (2) имеет вид:

$$\hat{K} \varphi \Big|_{U_{kj}} = \tilde{F}_{\vec{p}_l \rightarrow \vec{q}_l}^k \left[ \exp(ikS_l(\vec{p}_l, \vec{q}_l)) \mu_l^{1/2} \varphi(\vec{p}_l, \vec{q}_l) \right]_{U_{kj}} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \text{Ind } l \Big|_{U_{kj}}\right). \quad (3)$$

В (3)  $\tilde{F}_{\vec{p}_l \rightarrow \vec{q}_l}^k$  - обратное  $k$ -преобразование Фурье, преобразование с большим параметром, в качестве которого в данной задаче выступает волновое число  $k$ , по указанным импульсным переменным карты,  $S_l(\vec{p}_l, \vec{q}_l)$  - модифицированная фазовая функция и  $\mu_l$  - плотность меры на карте с координатами  $\{\vec{p}_l, \vec{q}_l\}$ ,  $I \cup \bar{I} = \{1, 2, 3\}$  (в качестве таковой удобно взять величину  $\mu_l = |J_{\vec{p}_l, \vec{q}_l}|^{-1}$ ),  $\text{Ind } l \Big|_{U_{kj}}$  - индекс Маслова-Арнольда, вычисленный на  $\Gamma_j(\vec{p}, \vec{q})$  для карты  $U_{kj}$  [6,7]. Пример численной реализации решений вида (2), (3) для задач ионосферного распространения коротких радиоволн имеется в [5,8].

Основной задачей при построении решения в случае возбуждения волноводного канала является определение начальных условий для бихарактеристической системы ОДУ, решение которой задает  $\Gamma_2(\vec{p}, \vec{q})$ . При этом для многообразия  $\Gamma_1(\vec{p}, \vec{q})$  начальными условиями для системы ОДУ выступают условия излучения волны точечным источников с заданными координатами. Начальные же условия для лучевой

конгруэнции, соответствующей  $\Gamma_2(\vec{p}, \vec{q})$ , в том числе начальные значения фазовых функций в (3) и индекса  $Ind l|_{U_{k_2}}$ , берутся (переносятся) с ближайшей (в координатном пространстве) точки многообразия  $\Gamma_1(\vec{p}, \vec{q})$ . При этом значение амплитудной функции  $\varphi(\vec{p}_I, \vec{q}_I)$  в (3) на начальной карте многообразия  $\Gamma_2(\vec{p}, \vec{q})$  также берется в соответствующей точке с карты, многообразия  $\Gamma_1(\vec{p}, \vec{q})$ , но умножается на коэффициент прохождения (подбарьерного просачивания), то есть имеет вид:  $D_I(\vec{p}_I, \vec{q}_I)\varphi(\vec{p}_I, \vec{q}_I)$ .

Согласно [1-5] коэффициент подбарьерного просачивания волны можно оценить следующим выражением:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{k\pi}{4} \beta a^2 (1-\gamma^2)\right) * \hat{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + i\frac{k}{2} \beta a^2 (1-\gamma^2)\right), \quad (4)$$

В (4)  $\hat{\Gamma}$  - гамма-функция комплексного аргумента. Формула включает параметры параболической аппроксимации показателя преломления в окрестности максимума электронной плотности слоя E и характеристики конгруэнций лучевых семейств, отвечающих подмногообразиям  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Для изотропной модели показателя преломления ионосферной плазмы  $n(\vec{q})$ , используемой в данной задаче, получим:

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 n^2(h)}{\partial h^2} \right) \Big|_{h=h_{MAX}} ; \quad a^2 (1-\gamma^2) = \frac{1}{4} (\delta h)^2. \quad (5)$$

Здесь  $h$  – пространственная координата в направлении градиента показателя преломления в точке отражения луча, соответствующего падающей на слой волне,

$h_{MAX}$  - значение этой переменной в минимуме показателя преломления (соответствует максимуму электронной плотности в слое E),  $\delta h$  задается формулой:

$$\delta h = (h_2 - h_1) \quad (6)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  - значения координаты  $h$  на уровне функции  $n(\vec{r}) = n(\vec{r}_{ref}) = n(h_1) = n(h_2)$ , соответствующем точке отражения, а точка отражения, в свою очередь, определяется как точка на лучевой траектории, где траектории ортогональна градиенту показателя преломления.

Эта точка и использовалась в расчетах как точка начальных данных для построения связанного с  $\Gamma_1(\vec{p}, \vec{q})$  многообразия  $\Gamma_2(\vec{p}, \vec{q})$ . Данный алгоритм не связан с предположением о сферически симметричной модели ионосферы, как это предполагалось в [5], и может быть использован для любых изотропных моделей показателя преломления.

Используя модель (1) и характеристики слоя E, «эффективную параболичность» высотного профиля квадрата показателя преломления  $n^2$  в максимуме (см. (5)) удобно задать через параметры модели:

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 n^2(h)}{\partial h^2} \right) \Big|_{h=h_2} = -\frac{40,4}{f^2} 10^{-6} \frac{\partial^2 Ne(h)}{\partial h^2} \Big|_{h=h_2} = \frac{f_{2p}^2}{f^2} \frac{\sigma_2}{a_2^2} \quad (7)$$

Подставляя в (4) определенные формулами (5) – (7) параметры, получим следующее представление для коэффициента просачивания:

$$T \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{k\pi f_{2p}}{16f} \sqrt{\sigma_2} \frac{\delta^2}{a_2}\right) * \hat{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + i \frac{k f_{2p}}{8f} \sqrt{\sigma_2} \frac{\delta^2}{a_2}\right). \quad (8)$$

Из анализа структуры многообразия  $\Gamma_1$  при наклонном падении радиоволны на полупрозрачный слой E ионосферной плазмы следует, что в точках отражения лучей это многообразие не имеет особых (фокальных) точек [3]. В области начальных данных, выбранных по указанному выше алгоритму, многообразие  $\Gamma_2$  также не имеет фокальных точек. В результате для нормировки решения на подмногообразии  $\Gamma_2$ , то есть связи его с решением на  $\Gamma_1$  достаточно использовать только неособые карты и задать амплитудную функцию  $\varphi|_{U_{k2}}$  в (5), связав ее с амплитудной функцией  $\varphi|_{U_{k1}}$  соотношением (см. [3-5]):

$$\varphi|_{U_{k2}, h=h_{start}} = D \varphi|_{U_{k1}, h=h_{ref}} = T \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{|J_{\vec{q}}|_{h=h_{start}}}{|J_{\vec{q}}|_{h=h_{ref}}}} \varphi|_{U_{k1}, h=h_{ref}}. \quad (9)$$

Появление фазового множителя в (9) связано с согласованием индекса Маслова-Арнольда на картах многообразия  $\Gamma_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$  и  $\Gamma_2(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$ . При использовании коэффициента отражения, полученного из модельной задачи для плоской волны [1,2], этот множитель обеспечивает согласование индекса в данной геометрии многообразий, (при излучении точечного источника), имеющей иные структуры множеств фокальных точек, чем при падении плоской волны [3].

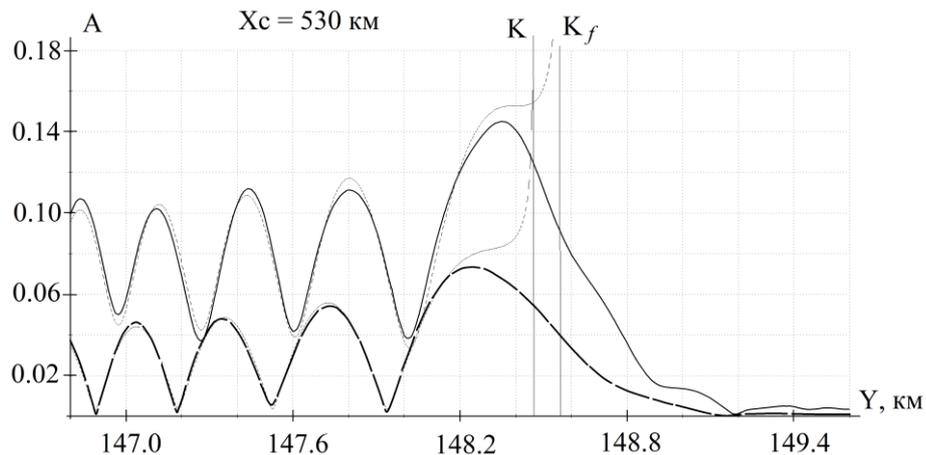
Формула (8) определяет экспоненциальное затухание волны просачивания, пропорциональное квадрату расстояния от точки вершины лучевой траектории, соответствующей падающей волне, до уровня формирования волны, попадающей в канал. Поэтому при нахождении оптимальных условий возбуждения волноводного канала с помощью рассматриваемого механизма требуется найти максимум модуля выражения (9). Данная задача решается численно, при этом используется часть конгруэнции отражающихся от слоя E лучей, близких к критическому лучу (лучу Педерсена).

Волна, попадающая в ионосферный волноводный канал, при дальнейшем распространении формирует в канале систему каустических особенностей типа  $A_3$ , расходящиеся ветви (простые каустики типа  $A_2$ ) которых асимптотически приближаются к пространственным границам канала. Если соответствующая часть лучей конгруэнции многообразия  $\Gamma_2$ , отвечающая оптимальным условиям подбарьерного просачивания, оказывается в области фокусировки в канале, то получается дополнительное усиление поля канализируемой волны, которое может стать сопоставимым, или даже превысить уровень поля волны «основного» излучения, попадающего на эту высоту в результате отражения от слоя F2.

На рис.4 представлены результаты математического моделирования структуры волнового поля в зоне формирования одновременно и каустики канализируемых лучей (координата фокальной каустической точки отмечена буквой K) и каустики лучей, отраженных от слоя F2 (фокальная точка отмечена буквой Kf). График представлен в декартовой системе координат с центром в точке расположения передатчика и с осью X, ориентированной по касательной вдоль земной поверхности. Таким образом, здесь представлено сечение волнового поля (близкое к вертикальному) на дальности около 550 км. Амплитуда волнового поля представлена в относительных единицах. Важным представляется тот факт, что амплитуда поля канализируемой волны (на графике

представлена синим цветом) и амплитуда «основного» поля волны (представлена черным цветом), отраженной от ионосферного слоя F2 и не захваченной каналом, на указанной дальности соизмеримы. Отношение  $|\psi_{\Gamma_1}(\vec{r})_{MAX}|/|\psi_{\Gamma_2}(\vec{r})_{MAX}| \approx 2$ . Более того, с ростом дальности уровень волны в канале сохраняется, а уровень «основной» волны быстро падает вследствие большой расходимости лучей.

Волновые поля на графике представлены отдельно вследствие большой пространственной разнесенности траекторий распространения соответствующих компонент излучения, падающего на ионосферу. В зависимости от степени когерентности их можно суммировать и когерентно, и не когерентно.



**Рис. 4. Пространственная структура волнового поля в сечении, содержащем каустики «основных» и «дифракционных» лучей.**

### **Заключение**

Представленный материал позволяет сделать вывод, что возбуждение межслоевого ионосферного канала для волн КВ диапазона возможно путем формирования поля высокой интенсивности для направления излучения, соответствующего критическому отражению волн. При этом основным механизмом возбуждения становится эффект подбарьерного просачивания волны на уровень высоты, где выполнены условия формирования такого канала.

Применение метода канонического оператора Маслова позволяет промоделировать и исследовать детали сложного пространственного распределения волнового поля в канале. В частности, можно не только проследить эволюцию структуры волнового поля с ростом расстояния, но также учесть взаимодействие механизмов градиентного и дифракционного возбуждения волноводного канала, учесть возможность возбуждения канализованной волны на нисходящем участке отраженной слоем F2 «основной» волны за счет эффекта надбарьерного отражения, оценить эффект «деградации» поля в канале за счет вторичного просачивания и ухода из канала волны.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-12-00299-П.*

### **Литература**

1. Палкин Е.А., Петрович А.А. Асимптотические представления решения задачи о структуре волнового поля при падении плоской волны на полупрозрачный неоднородный плазменный слой (модельная задача). //Радиотехника и электроника. 2021. Т.66. №1. С.18-26.

2. Palkin E.A., Petrovich A.A. Diffraction-beam theory of HF radio waves propagation in the description of ionospheric layers translucency effect. //Proceedings of 2019 Russian Open Conference on Radio Wave Propagation (RWP), 2019, Vol.1, P. 500 – 503.
3. Палкин Е.А., Петрович А.А. Особенности асимптотического решения в форме канонического оператора Маслова для задачи о критическом отражении радиоволн от неоднородного ионосферного слоя // Современные проблемы дистанционного зондирования, распространения и дифракции волн. Материалы Всероссийской открытой научной конференции. Муром 28.06 – 30.06. 2022 г. / Муром: Вл. ГУ, 2022, С.81 – 91. (DOI:10.24412/2304-0297-2022-1-81-91).
4. Колчина А.А., Палкин Е. А., Петрович А.А. Применение метода канонического оператора Маслова для асимптотического описания волновых полей при критическом отражении радиоволн от ионосферных слоев. / Распространение радиоволн. Сборник докладов XXVIII Всероссийской открытой научной конференции [Электронный ресурс]: научное электронное издание // Йошкар-Ола: Издательство Поволжского государственного технологического университета, 2023, С. 519–522. URL: <https://science.volgatech.net/upload/documents/science/RRW2023.pdf> ISBN 978-5-8158-2337-2 © ПвГТУ, 2023., © Научный совет ОФН РАН, 2023.
5. Ипатов Е. Б., Колчина А.А., Палкин Е. А., Петрович. А.А. Структура волнового поля при дифракционном возбуждении межслоевого ионосферного канала. / В Сб. Всероссийские открытые Армандовские чтения: Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн / Материалы Всероссийской открытой научной конференции. // Муром: МИ ВлГУ, 2023, С. 55 – 62. (DOI^ 10.24412/2304-0297-2023-1-55-62).
6. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. – М.: изд. МГУ, 1965. – 553 с.
7. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
8. Ipatov E.B., Lukin D.S. and Palkin E.A. Maslov canonical operator in problems of numerical simulation of diffraction and propagation of waves in inhomogeneous media./Soviet journal of numerical analysis and mathematical modelling. VNU Sciencepress BV. 1990, V.5, N6, P. 465 – 488.
9. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Методы моделирования распространения электромагнитных волн в ионосфере с учетом распределений электронной концентрации и магнитного поля Земли. //Радиотехника и электроника, 2014, т.59, N12, С.1180-1187.
10. Растягаев Д. В., Палкин Е. А., Лукин Д. С., Крюковский А. С., Ипатов Е. Б. Применение дифракционно-лучевой теории к задачам распространения электромагнитных волн в ионосферной плазме. //Известия ВУЗов. Радиофизика, 2021, т.64, N8-9, С.590-602 (DOI:10.52452/00213462\_2021\_64\_08\_590).
11. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере. // Космические исследования, 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 593–600.
12. Ching B.K., Chiu Y.T. A phenomenological model of global ionospheric electron density in the E, F1- and F2-region. // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics., – 1975. – V. 33, P. 1615-1630.
13. Bilitza, D. International Reference Ionosphere. // Radio Sci. – 2001, – V. 36. – No. 42. – P. 261–275.