УДК 53.089 DOI: 10.24412/2304-0297-2024-1-113-122

Общие и частные уравнения Гельмгольца гиротропных волноводов при нормальном намагничивании с учетом тепловых потерь

Г.Б. Итигилов[1], Д.Ш. Ширапов[1], В.А. Кравченко[1]

[1]*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления*
670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В.
E-mail: shir48@mail.ru

Из обобщенных уравнений Гельмгольца гибридных НЕ- и ЕН- волн, учитывающих тепловые потери, для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании [1], выведены общие уравнения Гельмгольца при нормальном намагничивании. Получены обобщенные и общие формулы поперечных компонент электромагнитного поля с учетом тепловых потерь для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном и нормальном намагничиваниях. Из общих формул поперечных компонент электромагнитного поля гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании найдены формулы поперечных компонент электромагнитного поля для нормально намагниченного гиротропного эллиптического волновода с учетом тепловых потерь. Из общих уравнений Гельмгольца НЕ- и ЕН- волн для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании и при известных поперечных компонентах электромагнитного поля для гиротропного эллиптического волновода при нормальном намагничивании определены уравнения Гельмгольца гибридных НЕ- и ЕН- волн гиротропного эллиптического волновода, учитывающие тепловые потери, при нормальном намагничивании.

Ключевые слова: Уравнения Гельмгольца, электромагнитные волны, гиротропный волновод, намагничивание, тепловые потери

General and partial Helmholtz equations of gyrotropic waveguides under normal magnetization taking into account heat losses

G.B. Itigilov[1], D.Sh. Shirapov[1], V.A. Kravchenko[1]

[1]*East Siberian State University of Technology and Management*

From the generalized Helmholtz equations of hybrid HE- and EH- waves, taking into account heat losses, for gyrotropic waveguides with orthogonally curved cross-section shapes under arbitrary magnetization [1], the general Helmholtz equations under normal magnetization are derived. Generalized and general formulas of the transverse components of the electromagnetic field are obtained, taking into account heat losses, for gyrotropic waveguides with orthogonally curved cross-section shapes under arbitrary and normal magnetization. From the general formulas of the transverse components of the electromagnetic field of gyrotropic waveguides with orthogonally curved cross-sectional shapes under normal magnetization, the formulas of the transverse components of the electromagnetic field for a normally magnetized gyrotropic elliptical waveguide are found, taking into account heat losses. From the general Helmholtz equations of HE- and EH- waves for gyrotropic waveguides with orthogonally curved cross-sectional shapes under normal magnetization and with known transverse components of the electromagnetic field for a gyrotropic elliptical waveguide under normal magnetization, the Helmholtz equations of hybrid HE- and EH- waves of a gyrotropic elliptical waveguide, taking into account heat losses under normal magnetization, are determined.

Keywords: Helmholtz equations, electromagnetic waves, gyrotropic waveguide, magnetization, heat loss

Введение

В сверхвысокочастотных приборах, в том числе в гиротропных волноводах, используются ферриты [2, 3]. Из [4] следует, что в зависимости от материала изготовления в устройствах сверхвысоких частот тангенс угла диэлектрических потерь, например, для феррошпинели может принимать значения в диапазоне $(2{,}5–25)\cdot 10^{-4}$. Поэтому в зависимости от материала изготовления феррита, в гиротропных волноводах, могут иметь место существенные тепловые потери, влияющие как на основные параметры гиротропных волноводов, так и на характеристики, распространяющихся в них электромагнитных волн. Отсюда следует необходимость проведения исследований влияния тепловых потерь в зависимости от материала изготовления феррита на упомянутые параметры гиротропных волноводов и характеристики, распространяющихся в них волн.

Необходимым условием проведения таких исследований является наличие частных уравнений Гельмгольца гибридных *HE*- и *EH*- электромагнитных волн для гиротропного эллиптического волновода при нормальном намагничивании с последующим определением граничных условий и решением краевой задачи.

Целью данной статьи являются получение:

1) учитывающих тепловые потери, общих уравнений Гельмгольца гибридных электромагнитных *HE*- и *EH*- волн гиротропных волноводов с произвольными ортогональными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании;

2) обобщенных и общих формул поперечных компонент электромагнитного поля с учетом тепловых потерь для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном и нормальном намагничиваниях;

3) частных формул поперечных компонент электромагнитного поля для нормально намагниченного гиротропного эллиптического волновода с учетом тепловых потерь;

4) частных уравнений Гельмгольца гибридных *HE*- и *EH*- электромагнитных волн для гиротропного эллиптического волновода, учитывающих тепловые потери, при нормальном намагничивании.

Общие уравнения Гельмгольца нормально намагниченных гиротропных волноводов с учетом тепловых потерь

Для устоявшегося во времени процесса без наведенных токов и зарядов система дифференциальных уравнений Максвелла имеет вид [2]:

$$\begin{cases} rot\bar{H} = j\omega\varepsilon'\bar{E}, \\ rot\bar{E} = -j\omega\bar{B}, \\ div\bar{B} = 0, \\ div\bar{D} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\bar{H}$ и $\bar{E}$ – напряженности магнитного и электрического полей соответственно;

$\bar{B} = \tilde{\mu}\bar{H}$ и $\bar{D}$ – магнитная и электрическая индукции соответственно;

j – мнимая единица;

ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость феррита;

ω – циклическая частота монохроматического процесса;

$\varepsilon' = \varepsilon - j\dfrac{\sigma}{\omega}$ – комплексная диэлектрическая проницаемость феррита; тензор магнитной проницаемости феррита

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & jk & jl \\ -jk & \mu_{22} & jm \\ -jl & -jm & \mu_{33} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $k = \dfrac{\omega \Upsilon \mu_0 M_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$;

$\mu_0 = 12{,}56 \cdot 10^{-7} \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная;

$\Upsilon = \dfrac{e}{m_0} = 1{,}76 \cdot 10^{11} \dfrac{\text{Кл}}{\text{кг}}$ – гиромагнитное отношение;

$\omega_0 = \Upsilon \mu_0 H_0$ – угловая частота свободной прецессии магнитного момента;

H_0 – напряженность постоянного внешнего магнитного поля;

M_0 – постоянная составляющая намагниченности.

В работе [1] решением системы дифференциальных уравнений (1) были получены обобщенные уравнения Гельмгольца гибридных *HE*- и *EH*- волн для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании.

Для решения поставленных в данной статье задач воспользуемся вышеупомянутыми уравнениями. Из [1] следует обобщенное уравнение Гельмгольца гибридной *HE*- волны для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании

$$\Delta_{11} H_z + \Delta_{22} H_z + j\gamma(\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) - j\omega^2 \varepsilon' (lH_1 + mH_2) + \omega^2 \varepsilon' \mu_{33} H_z = 0, \tag{3}$$

где $H_3 = H_Z$ – продольная;

H_1 и H_2 – поперечные компоненты магнитного поля;

γ – постоянная распространения;

$\delta_1 = \dfrac{1}{h_1}\left(\dfrac{\partial}{\partial q_1} + \Gamma_{21}^2\right)$;

$\delta_2 = \dfrac{1}{h_2}\left(\dfrac{\partial}{\partial q_2} + \Gamma_{12}^1\right)$;

$\nabla_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial}{\partial q_i}, i = 1{,}2$;

h_1, h_2 – коэффициенты Ламэ [5];

q_1, q_2 – обобщенные поперечные координаты;

$\Delta_{11} = \delta_1 \nabla_1 = \dfrac{1}{h_1^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial q_1} + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1\right)\dfrac{\partial}{\partial q_1}$;

$\Delta_{22} = \delta_2 \nabla_2 = \dfrac{1}{h_2^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial q_2} + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2\right)\dfrac{\partial}{\partial q_2}$;

Γ_{12}^1, Γ_{21}^2 – символы Кристоффеля [6].

Коэффициенты Ламэ h_i, символы Кристоффеля Γ_{12}^1 и Γ_{21}^2, дифференциальные операторы 1-го порядка δ_i, ∇_i и 2-го порядка $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{12}$ для эллиптических волноводов имеют вид [7]:

$$\begin{cases} h_1 = h_2 = \rho d; \quad h_3 = h_Z = 1; \nabla_1 = \dfrac{1}{\rho d}\dfrac{\partial}{\partial \xi}; \nabla_2 = \dfrac{1}{\rho d}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}; \\ \delta_1 = \dfrac{1}{\rho d}\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi} + \dfrac{sh 2\xi}{2d^2}\right); \delta_2 = \dfrac{1}{\rho d}\left(\dfrac{\partial}{\partial \varphi} + \dfrac{\sin 2\varphi}{2d^2}\right); \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \dfrac{\sin 2\varphi}{2d^2}; \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{11}^1 = \dfrac{sh 2\xi}{2d^2}; \\ \Delta_{11} = \dfrac{1}{\rho^2 d^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}; \Delta_{22} = \dfrac{1}{\rho^2 d^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \Delta_{12} = \dfrac{1}{\rho^2 d^2}\dfrac{\partial}{\partial \xi}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}, \end{cases} \qquad (4)$$

где ρ – фокусное расстояние эллипса;

$d^2 = ch^2\xi - \cos^2\varphi$; ξ, φ – поперечные координаты эллиптической системы координат.

Обобщенное уравнение Гельмгольца гибридной *EH*- волны для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании имеет вид [1]

$$\begin{gathered} \mu_{11}\Delta_{11}E_Z + \mu_{22}\Delta_{22}E_Z + j\gamma(\mu_{11}\delta_1 E_1 + \mu_{22}\delta_2 E_2) + \omega(\mu_{11}m\delta_1 - \mu_{22}l\delta_2)H_Z + \\ + \gamma k\omega(-lH_1 - mH_2 - j\mu_{33}H_Z) - \omega^2\varepsilon'(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})E_Z + j\omega(lk\delta_1 + mk\delta_2).H_Z = 0. \end{gathered} \qquad (5)$$

где $E_3 = E_Z$ – продольная, E_1 и E_2 – поперечные компоненты электрического поля.

Для гибридных *HE*- и *EH*- волн при нормальном намагничивании компоненты тензора магнитной проницаемости феррита (2) принимают вид [8]:

$$\mu_{11} = \mu_{\|}; \ \mu_{22} = \mu_{33} = \mu; \ k = l = 0; \ m \neq 0. \qquad (6)$$

Тогда с учетом (6) из (3) получим общее уравнение Гельмгольца гибридной *HE*- волны для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании

$$\Delta_{11}H_Z + \Delta_{22}H_Z + j\gamma(\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) - j\omega^2\varepsilon' mH_2 + \omega^2\varepsilon'\mu H_Z = 0. \qquad (7)$$

Аналогично, с учетом (6) из (5) получим общее уравнение Гельмгольца гибридной *EH*- волны для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании

$$\mu_{\|}\Delta_{11}E_Z + \mu\Delta_{22}E_Z + j\gamma(\mu_{\|}\delta_1 E_1 + \mu\delta_2 E_2) + \omega\mu_{\|}m\delta_1 H_Z + \omega^2\varepsilon'\mu_{\|}\mu E_Z = 0 \qquad (8)$$

Обобщенные формулы поперечных компонент электромагнитного поля гиротропных волноводов с учетом тепловых потерь

Разлагая операторы $rot\overline{H}$ и $rot\overline{E}$ из системы (1) по осям координат, получим

$$\begin{cases} \nabla_2 H_z + j\gamma H_2 = j\omega\varepsilon' E_1; \\ -(\nabla_1 H_z + j\gamma H_1) = j\omega\varepsilon' E_2; \\ \delta_1 H_2 - \delta_2 H_1 = j\omega\varepsilon' E_z. \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} \nabla_2 E_z + j\gamma E_2 = -j\omega\overline{B}_1 = -j\omega(\mu_{11}H_1 + jkH_2 + jlH_z); \\ \nabla_1 E_z + j\gamma E_1 = j\omega\overline{B}_2 = j\omega(-jkH_1 + \mu_{22}H_2 + jmH_z); \\ \delta_1 E_2 - \delta_2 E_1 = -j\omega\overline{B}_z = -j\omega(-jlH_1 - jmH_2 + \mu_{33}H_z), \end{cases} \qquad (10)$$

Из (9) и (10) выразим поперечные компоненты электрического поля. Для этого из первого уравнения (9) находим

$$H_2 = \frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_1 - \nabla_2 H_z\right). \qquad (11)$$

Подставив (11) во второе уравнение (10), получим

$$\nabla_1 E_z + j\gamma E_1 = j\omega\left(-jkH_1 + \mu_{22}H_2 + jmH_z\right) = \omega kH_1 + \frac{j\mu_{22}\omega}{\gamma}\omega\varepsilon' E_1 - \frac{\mu_{22}\omega\nabla_2 H_3}{\gamma} - \omega mH_z.$$

Откуда после соответствующих преобразований относительно E_1 будем иметь

$$E_1 = -\frac{j\gamma}{b^2}\left[\nabla_1 E_z - \omega kH_1 + \left(\frac{\mu_{22}\omega}{\gamma}\nabla_2 + \omega m\right)H_z\right], \qquad (12)$$

где

$$b^2 = \omega^2\mu_{22}\varepsilon' - \gamma^2 \qquad (13)$$

Далее, из второго уравнения (9) выразим

$$H_1 = -\frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_2 + \nabla_1 H_z\right) \qquad (14)$$

Подставив (14) в первое уравнение (10) получим

$$\nabla_2 E_z + j\gamma E_2 = -j\omega\left(\mu_{11}H_1 + jkH_2 + jlH_z\right) = j\frac{\mu_{11}\omega^2\varepsilon' E_2}{\gamma} + \frac{\mu_{11}}{\gamma}\omega\nabla_1 H_z + \omega kH_2 + \omega lH_z.$$

Тогда после несложных преобразований относительно E_2, получим

$$E_2 = -\frac{j\gamma}{a^2}\left[\nabla_2 E_z - \omega kH_2 - \left(\frac{\mu_{11}\omega}{\gamma}\nabla_1 + \omega l\right)H_z\right], \qquad (15)$$

где

$$a^2 = \omega^2\mu_{11}\varepsilon' - \gamma^2. \qquad (16)$$

Дальше из правых частей (12) и (15) исключим поперечные компоненты H_1 и H_2, соответственно. Для этого подставляя (14) в (12) получим

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{j\gamma}{b^2}\left[\nabla_1 E_z - \omega kH_1 + \left(\frac{\mu_{22}\omega}{\gamma}\nabla_2 + \omega m\right)H_z\right] = \\ &= -\frac{j\gamma}{b^2}\left[\nabla_1 E_z - \omega k\left(-\frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_2 + \nabla_1 H_z\right)\right) + \left(\frac{\mu_{22}\omega}{\gamma}\nabla_2 + \omega m\right)H_z\right] = \\ &= -\frac{j\gamma\nabla_1 E_z}{b^2} - \frac{j\omega^2 k\varepsilon' E_2}{b^2} - \frac{\omega k\nabla_1 H_3}{b^2} - \frac{j\mu_{22}\omega\nabla_2 H_z}{b^2} - \frac{j\gamma\omega mH_z}{b^2}. \end{aligned} \qquad (17)$$

Подставив (11) в (15) имеем

$$\begin{aligned} E_2 &= -\frac{j\gamma}{a^2}\left[\nabla_2 E_z - \omega kH_2 - \left(\frac{\mu_{11}\omega}{\gamma}\nabla_1 + \omega l\right)H_z\right] = \\ &= -\frac{j\gamma}{a^2}\left[\nabla_2 E_z - \omega k\left(\frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_1 - \nabla_2 H_z\right)\right) - \left(\frac{\mu_{11}\omega}{\gamma}\nabla_1 + \omega l\right)H_z\right] = \\ &= -\frac{j\gamma\nabla_2 E_z}{a^2} + \frac{j\omega^2 k\varepsilon' E_1}{a^2} - \frac{\omega k\nabla_2 H_z}{a^2} + \frac{j\mu_{11}\omega\nabla_1 H_z}{a^2} + \frac{j\gamma\omega lH_z}{a^2}. \end{aligned} \qquad (18)$$

Из формул (17) и (18) следует, что, подставляя одно уравнение в другое, можно получить поперечные компоненты электрического поля E_1 и E_2, выраженные через продольные компоненты электрического и магнитного полей. Поэтому, подставив в (17) выражение (18), получим

$$E_1=-\frac{j\gamma a^2}{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2k^2}\left\{\nabla_1E_z+\left(\frac{\omega\mu_{22}}{\gamma}\frac{p^2}{a^2}\nabla_2+\omega m\right)H_z-\frac{j\omega^2\varepsilon' k}{a^2}\left[\nabla_2E_z-\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\nabla_1+\omega l\right)H_z\right]\right\},\quad(19)$$

где

$$p^2=\omega^2\varepsilon'\frac{\mu_{11}\mu_{22}-k^2}{\mu_{22}}-\gamma^2.\qquad(20)$$

После подстановки в (18) формулы (17), будем иметь

$$E_2=-\frac{j\gamma b^2}{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2k^2}\left\{\nabla_2E_z-\left(\frac{\omega\mu_{11}}{\gamma}\frac{g^2}{b^2}\nabla_1+\omega l\right)H_z+\frac{j\omega^2\varepsilon' k}{b^2}\left[\nabla_1E_z+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\nabla_2+\omega m\right)H_z\right]\right\},\qquad(21)$$

где

$$g^2=\omega^2\varepsilon'\frac{\mu_{11}\mu_{22}-k^2}{\mu_{11}}-\gamma^2.\qquad(22)$$

Выражения (19) и (21) являются обобщенными формулами поперечных компонент электрического поля для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании с учетом тепловых потерь.

Для определения поперечных компонент магнитного поля преобразуем (14)

$$H_1=-\frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_2+\nabla_1H_z\right)=-\frac{j}{j}\frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_2+\nabla_1H_z\right)=-\frac{\omega\varepsilon' E_2}{\gamma}+\frac{j\nabla_1H_z}{\gamma}.\qquad(23)$$

Далее, подставляя в (23) формулу (21), получим

$$H_1=-\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}E_2+\frac{j\nabla_1H_z}{\gamma}=$$

$$=-\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\left\{-\frac{j\gamma b^2}{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2k^2}\left\{\nabla_2E_z-\left(\frac{\omega\mu_{11}}{\gamma}\frac{g^2}{b^2}\nabla_1+\omega l\right)H_z+\frac{j\omega^2\varepsilon' k}{b^2}\left[\begin{gathered}\nabla_1E_z+\\+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\nabla_2+\omega m\right)H_z\end{gathered}\right]\right\}\right\}+$$

$$+\frac{j\nabla_1H_z}{\gamma}=$$

$$=\frac{j\gamma b^2}{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2k^2}\left\{\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2E_z-\left(\frac{\omega^2\varepsilon'\mu_{11}}{\gamma^2}\frac{g^2}{b^2}\nabla_1+\frac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}\right)H_z+\frac{j\omega^2\varepsilon' k}{b^2}\left[\begin{gathered}\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1E_z+\\+\left(\nabla_2+\frac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\right)H_z\end{gathered}\right]\right\}+$$

$$+\frac{j\nabla_1H_z}{\gamma}.$$

В последнем выражении внесем в фигурную скобку $\dfrac{j\nabla_1H_z}{\gamma}$ и тогда получим

$$H_1=\frac{j\gamma b^2}{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2k^2}\left\{\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2E_z-\left(\frac{\omega^2\mu_{11}}{\gamma^2}\frac{g^2}{b^2}\nabla_1+\frac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}\right)H_z+\frac{a^2b^2-\omega^4\varepsilon'^2k^2}{\gamma^2b^2}\nabla_1H_z+\right.$$

$$\left.+\frac{j\omega^2\varepsilon' k}{b^2}\left[\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1E_z+\left(\nabla_2+\frac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\right)H_z\right]\right\}.$$

После соответствующих преобразований окончательно получим

$$H_1 = \frac{j\gamma b^2}{a^2b^2 - \omega^4 \varepsilon'^2 k^2}\left\{\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z - \left(\nabla_1 + \frac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}\right)H_z + \frac{j\omega^2 k\varepsilon'}{b^2}\left[\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z + \left(\nabla_2 + \frac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\right)H_z\right]\right\}. \quad (24)$$

Для определения поперечной компоненты H_2, воспользуемся формулой (11), которую перепишем

$$H_2 = \frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_1 - \nabla_2 H_z\right) = \frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}E_1 + \frac{j\nabla_2 H_z}{\gamma}. \quad (25)$$

Затем подставив в (25) формулу (19), получим

$$H_2 = \frac{1}{j\gamma}\left(j\omega\varepsilon' E_1 - \nabla_2 H_z\right) = \frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}E_1 + \frac{j\nabla_2 H_z}{\gamma} =$$

$$= \frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\left\{ -\frac{j\gamma a^2}{a^2b^2 - \omega^4\varepsilon'^2 k^2}\left\{\nabla_1 E_z + \left(\frac{\omega\mu_{22}}{\gamma}\frac{p^2}{a^2}\nabla_2 + \omega m\right)H_z - \frac{j\omega^2\varepsilon' k}{a^2}\left[\begin{matrix}\nabla_2 E_z - \\ -\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\nabla_1 + \omega l\right)H_z\end{matrix}\right]\right\}\right\} +$$

$$+ \frac{j\nabla_2 H_z}{\gamma}.$$

После внесения $\frac{j\nabla_2 H_z}{\gamma}$ в фигурную скобку получим

$$H_2 = -\frac{j\gamma a^2}{a^2b^2 - \omega^4\varepsilon'^2 k^2}\left\{ \frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z + \left(\frac{\omega^2\varepsilon'\mu_{22}}{\gamma^2}\frac{p^2}{a^2}\nabla_2 - \frac{a^2b^2 - \omega^4\varepsilon'^2 k^2}{\gamma^2 a^2}\nabla_2 + \frac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\right)H_z - \right.$$

$$\left. - \frac{j\omega^2\varepsilon' k}{a^2}\left[\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z - \left(\nabla_1 + \frac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}\right)H_z\right]\right\}.$$

После компоновки и группировки последней формулы получим

$$H_2 = -\frac{j\gamma a^2}{a^2b^2 - \omega^4\varepsilon'^2 k^2}\left\{\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z + \left(\nabla_2 + \frac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\right)H_z - \frac{j\omega^2 k\varepsilon'}{a^2}\left[\frac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z - \left(\nabla_1 + \frac{\omega^2\varepsilon' l}{\gamma}\right)H_z\right]\right\}.$$

(26)

Выражения (24) и (26) представляют обобщенные формулы поперечных компонент магнитного поля для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения, с регулярной продольной осью, совпадающей с осью Z декартовой системы координат, при произвольном намагничивании.

Общие и частные формулы поперечных компонент электромагнитного поля гиротропных волноводов с учетом тепловых потерь

В эллиптической системе координат при нормальном намагничивании направление внешнего магнитного поля совпадает с координатной осью φ и элементы тензора магнитной проницаемости феррита (2) выражаются формулой (6). Поэтому (13), (16), (20) и (22) принимают вид

$$\begin{cases} a^2 = \omega^2\mu_{\|}\varepsilon' - \gamma^2, \ b^2 = \omega^2\mu\varepsilon' - \gamma^2, \\ g^2 = \omega^2\varepsilon'\mu - \gamma^2, \ p^2 = \omega^2\varepsilon'\mu_{\|} - \gamma^2. \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$a^2 = p^2 = \omega^2\varepsilon'\mu_{\|} - \gamma^2, \ b^2 = g^2 = \omega^2\varepsilon'\mu - \gamma^2. \quad (27)$$

Подставив (6) и (27) в обобщенные формулы поперечных компонент электрического поля (19), (21) и в обобщенные формулы поперечных компонент магнитного поля (24), (26) получим общие формулы поперечных компонент электромагнитного поля для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании

$$\begin{cases} E_1 = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\nabla_1 E_z + \dfrac{\omega\mu}{\gamma}\left(\nabla_2 + \dfrac{m}{\mu}\gamma\right)H_z\right\} = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\nabla_1 E_z + \dfrac{\omega\mu}{\gamma}\overline{\nabla}_2^m H_z\right\}, \\ E_2 = -\dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\nabla_2 E_z - \dfrac{\omega\mu_{\|}}{\gamma}\nabla_1 H_z\right\}, \\ H_1 = \dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z - \nabla_1 H_z\right\}, \\ H_2 = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z + \left(\nabla_2 + \dfrac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\right)H_z\right\} = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z + \nabla_2^m H_z\right\}, \end{cases} \tag{28}$$

где дифференциальные операторы 1-го порядка с учетом намагниченности при нормальном намагничивании имеют вид

$$\overline{\nabla}_2^m = \nabla_2 + \frac{m}{\mu}\gamma,\ \nabla_2^m = \nabla_2 + \frac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}.$$

Для определения поперечных компонент электромагнитного поля гиротропного эллиптического волновода при нормальном намагничивании, подставим коэффициенты Ламэ в эллиптической системе координат из (4) в (28). Тогда получим

$$\begin{cases} E_\xi = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\dfrac{1}{\rho d}\left[\dfrac{\partial E_z}{\partial\xi} + \dfrac{\omega\mu}{\gamma}\left(\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \rho d\dfrac{m}{\mu}\gamma\right)H_z\right], \\ E_\varphi = -\dfrac{j\gamma}{a^2}\dfrac{1}{\rho d}\left[\dfrac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \dfrac{\omega\mu_{\|}}{\gamma}\dfrac{\partial H_z}{\partial\xi}\right], \\ H_\xi = \dfrac{j\gamma}{a^2}\dfrac{1}{\rho d}\left[\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial H_z}{\partial\xi}\right], \\ H_\varphi = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\dfrac{1}{\rho d}\left[\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial\xi} + \left(\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \dfrac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\rho d\right)H_z\right]. \end{cases} \tag{29}$$

Уравнения Гельмгольца нормально намагниченного гиротропного эллиптического волноводов с учетом тепловых потерь

Для определения уравнения Гельмгольца гибридной *HE*- волны для гиротропного эллиптического волновода при нормальном намагничивании, подставим выражения для поперечных компонент $H_\xi = H_1$ и $H_\varphi = H_2$ из (29) в формулу (7) и с учетом (4), получим

$$\begin{gathered} \frac{\mu_{\|}}{\mu}\frac{b^2}{a^2}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 H_Z}{\partial\varphi^2} + \rho^2 d^2\left(p^2 + \frac{m}{\mu}\gamma\frac{\sin 2\varphi}{2\rho d^3}\right)H_Z = \\ = \frac{\gamma}{\omega\mu}\frac{b^2 - a^2}{a^2}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial\xi\partial\varphi} + ed\frac{\omega\varepsilon' m}{\mu}\frac{\partial E_Z}{\partial\xi}, \end{gathered} \tag{30}$$

где $p^2 = \omega^2\varepsilon'\dfrac{\mu^2 - m^2}{\mu} - \gamma^2$.

Далее, подставив выражения для поперечных компонент $E_\xi = E_1$ и $E_\varphi = E_2$ из (29) в (8) и с учетом (4), получим уравнение Гельмгольца гибридной *EH*- волны для гиротропного эллиптического волновода при нормальном намагничивании

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_Z}{\partial \xi^2} + \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + b^2 \rho^2 d^2 E_Z = \dfrac{\gamma}{\omega \varepsilon'}\dfrac{b^2 - a^2}{a^2}\dfrac{\partial^2 H_Z}{\partial \xi \partial \varphi} - \\ - \omega m \rho d \left(\dfrac{\partial}{\partial \xi} + \dfrac{sh 2\xi}{2d^2} \right) H_Z . \end{cases} \tag{31}$$

Выводы

1. Из обобщенных уравнений Гельмгольца гибридных *НЕ*- (3) и *ЕН*- волн (5) для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании, учитывающих тепловые потери [1], выведены общие уравнения Гельмгольца гибридных *НЕ*- (7) и *ЕН*- волн (8) для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании, учитывающие тепловые потери;

2. Получены обобщенные формулы поперечных компонент электрического (19), (21) и магнитного (24), (26) полей для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения, учитывающие тепловые потери, при произвольном намагничивании;

3. Из обобщенных формул поперечных компонент электрического (19), (21) и магнитного (24), (26) полей определены общие формулы поперечных компонент электромагнитного поля для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения, учитывающие тепловые потери, при нормальном намагничивании (28);

4. Из общих формул поперечных компонент электромагнитного поля (28) для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения найдены формулы поперечных компонент электромагнитного поля для гиротропного эллиптического волновода, учитывающие тепловые потери, при нормальном намагничивании (29);

5. Из общих уравнений Гельмгольца (7) и (8) с учетом поперечных компонент электромагнитного поля (29) определены частные уравнения Гельмгольца гибридных *НЕ*- (30) и *ЕН*- волн (31) для гиротропного эллиптического волновода при нормальном намагничивании, учитывающие тепловые потери.

Литература

1. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш., Кравченко В.А. Обобщенные, общие и частные уравнения Гельмгольца гиротропных волноводов // Радиотехника. 2023. Т. 87. № 12. С. 137-148. DOI: https://doi.org/10.18127/j00338486-202312-15

2. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. -Л.: Госэнергоиздат, 1963. 664 с.

3. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. -М.: Физматлит, 1994. 464 с.

4. Устинов А., Кочемасов В., Хасьянова Е. Ферритовые материалы для устройств СВЧ-электроники. Основные критерии выбора // СВЧ-электроника. 2015. №8. С.86-92.

5. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. -М.: Наука. 1967. 780 с.

6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. -М.: Наука. 1973. 832 с.

7. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш. Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в гиротропных волноводах // Улан-Удэ: Издательство Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления. 2022. 154 с.
8. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Современные методы проектирования линий передач и резонаторов сверх- и крайне высоких частот. -М.: Педагогика-Пресс, 1998. 328с.