Построение ансамблей на базе фазокодированных последовательностей, удовлетворяющих границе Вэлча

Л.Г. Корнилова, А.Ю. Тюкаев, Н.В. Парсаев, А.Н. Леухин

ГОУ ВПО Марийский государственный технический университет, 424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, 3, E-mail: code@marstu.net

Решена задача синтеза бесконечного множества ансамблей квазиортогональных многофазных последовательностей с нулевым уровнем боковых лепестков периодической автокорреляционной функции. Предложен алгоритм формирования ансамблей квазиортогональных многофазных последовательностей с идеальной периодической автокорреляционной функцией.

The synthesis's problem of ensembles's infinite set of quasiorthogonal polyphase sequences with a zero level of side lobes of a periodic autocorrelation function is solved. The algorithm of creation of quasiorthogonal multiphase sequences's ensembles with an ideal periodic autocorrelation function is offered.

Введение

В современных системах связи множественного доступа с кодовым разделением широкое применение нашли ансамбли кодовых последовательностей, удовлетворяющих теоретической границе Вэлча [1], которая устанавливает связь между квадратом максимума корреляционного выброса $R_{\max}^2$ и объёмом V ансамбля:

$$R_{\max}^2 \geq \frac{V-1}{VN-1}, \qquad (1)$$

где $R_{\max} = \max\left(|R_{am}|, |R_{vm}|\right)$, $|R_{am}|$ – максимальный по ансамблю боковой лепесток нормированной периодической автокорреляционной функции (АКФ), $|R_{vm}|$ – максимум по ансамблю выброса нормированной периодической взаимной корреляционной функции (ВКФ), V – объём ансамбля, N – длина кодовой последовательности.

В данной работе будет разработан метод синтеза бесконечного множества ансамблей квазиортогональных многофазных последовательностей, каждая из которых обладает нулевым уровнем боковых лепестков периодической АКФ.

1 Постановка задачи синтеза ансамбля квазиортогональных многофазных последовательностей с идеальной периодической АКФ

Многофазную последовательность $\mathbf{\Gamma} = \{\gamma_n\}_{0,N-1}$ определим на основании выражения:

$$\mathbf{\Gamma} = \{\gamma_n\}_{0,N-1} = \{\exp(i\varphi_n)\}_{0,N-1}, \; n = 0,\ldots,N-1, \qquad (2)$$

где модуль каждого кодового элемента $|\gamma_n| = 1$, i – мнимая единица, значение фазы φ_n на каждом n-ом кодовом интервале принимает любое вещественное значение из диапазона $[0, 2\pi]$, N – длина кодовой последовательности.

Периодическую АКФ r_τ определим на основании выражения:

$$\mathrm{r}_\tau = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_{n+\tau \pmod N} \cdot \gamma_n^*, \; \tau = 0,1,\ldots,N-1, \qquad (3)$$

где γ_n^* – комплексно-сопряженный кодовый элемент, τ – циклический сдвиг кодовой последовательности.

Периодическую ВКФ η_τ двух последовательностей $\mathbf{\Gamma}^{(j)} = \{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(j)}$ и $\mathbf{\Gamma}^{(l)} = \{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(l)}$ определим на основании выражения:

$$\eta_\tau = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_{n+\tau \pmod N}^{(l)} \cdot \gamma_n^{(l)*}, \ \tau = 0,1,\ldots,N-1, \tag{4}$$

где $\gamma_n^{(l)*}$ – комплексно-сопряженный кодовый элемент последовательности $\mathbf{\Gamma}^{(l)} = \{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(l)}$.

Последовательности $\mathbf{\Gamma}^{(j)} = \{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(j)}$ и $\mathbf{\Gamma}^{(l)} = \{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(l)}$ назовём квазиортогональными, если выполняется условие:

$$|\eta_\tau| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_{n+\tau \pmod N}^{(l)} \cdot \gamma_n^{(l)*} \right| = c, \ \tau = 0,1,\ldots,N-1, \ c << N. \tag{5}$$

Для любых двух последовательностей $\mathbf{\Gamma}^{(j)} = \{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(j)}$ и $\mathbf{\Gamma}^{(l)} = \{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(l)}$ из квазиортогонального ансамбля выполняются условия:

$$|\eta_\tau| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_{n+\tau \pmod N}^{(j)} \cdot \left(\gamma_n^*\right)^{(l)} \right| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(i\varphi_{n+\tau \pmod N}^{(j)}\right) \cdot \exp\left(-i\varphi_n^{(l)}\right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(i\left(\varphi_{n+\tau \pmod N}^{(j)} - \varphi_n^{(l)}\right)\right) \right| = \begin{cases} \left|\mathrm{r}_\tau^{(j)}\right|, & \text{если} \ \ j = l, \\ c, & \text{если} \ \ j \neq l. \end{cases} \quad j,l,\tau = 0,1,\ldots,N-1. \tag{6}$$

Принимая во внимание условие равенства нулю боковых лепестков периодической АКФ последовательностей $\mathbf{\Gamma}^{(j)} = \{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(j)}$ и $\mathbf{\Gamma}^{(l)} = \{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(l)}$, получим следующее выражение для ансамбля квазиортогональных последовательностей с идеальной периодической АКФ:

$$|\eta_\tau| = \begin{cases} N, & \text{если} \ \ j = l, \tau = 0, \\ 0, & \text{если} \ \ j = l, \tau \neq 0, \ \ \tau = 0,1,\ldots,N-1. \\ c, & \text{если} \ \ j \neq l. \end{cases} \tag{7}$$

Считая, что первые два условия в выражении (7) выполнены, необходимо среди многофазных последовательностей с идеальной периодической АКФ найти такие, для которых справедливо третье условие.

2 Решение задачи синтеза ансамблей квазиортогональных многофазных последовательностей с идеальной периодической АКФ

В работе [2] разработан регулярный метод синтеза многофазных последовательностей вида (2) с идеальной периодической АКФ в случае, когда длина N кодовых последовательностей является квадратом некоторого целого числа k, т.е. $N = k^2$. Согласно [2] значения фазы φ_n на каждом n-ом кодовом интервале определяется в соответствии с выражением:

$$\varphi_n = \beta_{n \pmod k} + \frac{2\pi}{k} \cdot \left]\frac{n}{k}\right[\cdot n \pmod k \cdot \lambda, \ n = 0,\ldots,N-1, \ N = k^2, \tag{8}$$

где λ – число взаимно-простое с k; $]x[$ – целая часть числа x; $\mathbf{B}=\{\beta_m\}_{0,k-1}$ – вектор фаз, принимающих произвольные вещественные значения из диапазона $\beta_0=0$, $\beta_m\in[0;2\pi]$, $m=1,\ldots,k-1$.

Запишем выражение для модуля $|\tilde{\eta}_\tau|$ нормированной периодической ВКФ двух многофазных последовательностей $\mathbf{\Gamma}^{(j)}=\{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(j)}$ и $\mathbf{\Gamma}^{(l)}=\{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(l)}$, синтезированных в работе [2]:

$$|\tilde{\eta}_\tau|=\frac{1}{N}\cdot\left|\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(i\left(\beta^{(j)}_{n+\tau\,(\mathrm{mod}\,k)}+\frac{2\pi}{k}\cdot\left]\frac{n+\tau}{k}\right[\cdot(n+\tau)(\mathrm{mod}\,k)\cdot\lambda_j\right)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-i\left(\beta^{(l)}_{n\,(\mathrm{mod}\,k)}+\frac{2\pi}{k}\cdot\left]\frac{n}{k}\right[\cdot n\cdot\lambda_l\right)\right)\right|=$$
$$=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(i\left(\beta^{(j)}_{n+\tau\,(\mathrm{mod}\,k)}+\frac{2\pi}{k}\cdot\left]\frac{n+\tau}{k}\right[\cdot(n+\tau)(\mathrm{mod}\,k)\cdot\lambda_j-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\beta^{(l)}_{n\,(\mathrm{mod}\,k)}-\frac{2\pi}{k}\cdot\left]\frac{n}{k}\right[\cdot n\cdot\lambda_l\right)\right)\right|,\ \tau=0,1,\ldots,N-1. \tag{9}$$

Модули отсчётов нормированной периодической ВКФ двух многофазных последовательностей $\mathbf{\Gamma}^{(j)}=\{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(j)}$ и $\mathbf{\Gamma}^{(l)}=\{\gamma_n\}_{0,N-1}^{(l)}$, определяемых выражением (8), будут равны:

$$|\tilde{\eta}_\tau|=\frac{1}{N}\cdot\left|\sum_{q=0}^{k-1}\exp\left(i\left(\beta^{(j)}_{q+v\,(\mathrm{mod}\,k)}-\beta^{(l)}_q\right)\right)\cdot\exp\left(i\frac{2\pi}{k}\cdot\left(u+\left]\frac{q+v}{k}\right[\right)\cdot(q+v)\cdot\lambda_j\right)\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{p=0}^{k-1}\exp\left(i\frac{2\pi}{k}\cdot\left(p\cdot q\cdot(\lambda_j-\lambda_l)+p\cdot v\cdot\lambda_j\right)\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{10}$$

если $\tau=0,\ldots,N-1$, а разность $\lambda_j-\lambda_l\ (\mathrm{mod}\ k)$ – число взаимно-простое с k.

Ансамбль квазиортогональных многофазных последовательностей длины $N=k^2$ имеет объём V. Следовательно, из системы вычетов по модулю k взаимно простых с k:

$$\{\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{\varphi(k)-1}\}, \tag{11}$$

где $\varphi(k)$ – *фи*-функция Эйлера, необходимо отобрать такие, для которых выполняется равенство:

$$\text{НОД}(\lambda_j-\lambda_l,k)=1, \tag{12}$$

где числа $j,l=0,\ldots,V-1$ при условии, что $j\neq l$.

В общем случае число $N=k^2$ может быть представлено в виде произведения простых чисел $p_1,p_2,\ldots,p_k$, каждое из которых может участвовать в произведении некоторое $v_1,v_2,\ldots,v_k$ число раз, т.е.:

$$N=p_1^{v_1}\cdot p_2^{v_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{v_k},\ 1<p_1<p_2<\ldots<p_k. \tag{13}$$

Система вычетов по модулю k, удовлетворяющих условию (12), будет иметь вид $\{\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p_1-2}\}=\{1,2,\ldots,p_1\}$, так как полная система вычетов по модулю простого числа p_1 образует мультипликативную группу $G(p_1)$ поля Галуа $GF(p_1)$ [4]. Нулевой элемент этой группы не рассматривается, так как при вычислении периодической ВКФ $j \neq l$. В любой другой группе $G(p_j)$, $j > 1$ всегда найдутся вычеты кратные p_1, и условие (12) для них выполнено не будет. Тогда в случае нечётного N объем V ансамбля будет равен:

$$V = p_1 - 1, \tag{14}$$

где p_1 – наименьшее простое число в каноническом разложении числа N. Из выражения (14) следует важный вывод: ансамбль квазиортогональных многофазных последовательностей с идеальной периодической АКФ может быть образован только для нечётных значений N, так как в случае чётных N объём ансамбля $V = p_1 - 1 = 2 - 1 = 1$.

Определим количество K ансамблей квазиортогональных многофазных последовательностей с идеальной периодической АКФ нечётной длины $N = k^2$. Вектор фаз $\mathbf{B} = \{\beta_m\}_{0,k-1}$ в выражении (8), определяющим значения фазы φ_n на каждом n-ом кодовом интервале последовательности $\mathbf{\Gamma} = \{\gamma_n\}_{0,N-1} = \{\exp(i\varphi_n)\}_{0,N-1}$, принимает произвольные вещественные значения из диапазона $\beta_0 = 0$, $\beta_m \in [0; 2\pi]$, $m = 1, \ldots, k-1$, поэтому для нечётных значений $N = k^2$ можно сформировать бесконечное множество ансамблей квазиортогональных многофазных последовательностей с нулевым уровнем боковых лепестков периодической АКФ, т.е.:

$$K = \infty. \tag{15}$$

3 Алгоритм синтеза ансамблей квазиортогональных многофазных последовательностей с идеальной периодической АКФ

Алгоритм синтеза ансамблей квазиортогональных многофазных последовательностей с нулевым уровнем боковых лепестков периодической АКФ, в случае $N = k^2$, где $k \pmod 2 \neq 0$, можно представить следующим образом:

1. Определяем систему вычетов по модулю k взаимно простых с k:

$$\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\varphi(k)-1}\},\ \varphi(k) \text{ – } \textit{фи}\text{-функция Эйлера.}$$

2. Определяем наименьшее простое число p_1 в каноническом разложении числа N:

$$N = p_1^{\nu_1} \cdot p_2^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r}\ ,\ 1 < p_1 < p_2 < \ldots p_r\,.$$

3. Среди всех $C_{\varphi(k)}^{p_1-1}$ сочетаний по $p_1 - 1$ вычетов по модулю k взаимно простых с k из $\varphi(k)$ возможных вычетов отбираем w-ые сочетания вычетов $\{\lambda_0^{(w)}, \lambda_1^{(w)}, \ldots, \lambda_{p_1-2}^{(w)}\}$, для которых справедливо условие:

$$\text{НОД}\left(\lambda_q^{(w)} - \lambda_l^{(w)}, k\right) = 1,\ q \neq l\,,\ q, l = 0, 1, \ldots, \varphi(k) - 1,$$

где $w = 0, 1, \ldots, W-1$, $W = \infty$ – количество формируемых ансамблей.

4. w-ый ансамбль квазиортогональных многофазных последовательностей с нулевым уровнем боковых лепестков периодической АКФ будет иметь вид:

$$\left\{\mathbf{\Gamma}_{(0)}^{(w)}, \mathbf{\Gamma}_{(1)}^{(w)}, \ldots, \mathbf{\Gamma}_{(j)}^{(w)}, \ldots, \mathbf{\Gamma}_{(V-1)}^{(w)}\right\}, \tag{16}$$

где $V = p_1 - 1$ – объем ансамбля, а j-ая последовательность из ансамбля (16) имеет вид:

$$\mathbf{\Gamma}_{(j)}^{(w)} = \left\{\gamma_{(j)_n}^{(w)}\right\} = \left\{\exp\left(i\left(\beta_{n \pmod k} + \frac{2\pi}{k}\cdot\left]\frac{n}{k}\right[\cdot n\cdot\lambda_j^{(w)}\right)\right)\right\},$$

где $j = 0,\ldots,V-1$, $n = 0,1,\ldots,N-1$.

Заключение

В работе сформулирована задача синтеза ансамблей квазиортогональных многофазных последовательностей с нулевым уровнем боковых лепестков периодической АКФ. Доказано, что в случае $N = k^2$, где $k \neq 0 \pmod 2$, можно сформировать бесконечное множество ансамблей квазиортогональных многофазных последовательностей с идеальной периодической АКФ. При этом объем V каждого формируемого ансамбля определяется на основании выражения:

$$V = p_1 - 1,$$

где p_1 – наименьшее простое число в каноническом разложении числа N.

Разработан алгоритм формирования ансамблей квазиортогональных многофазных последовательностей с идеальной периодической АКФ.

Следует заметить, что ансамбли квазиортогональных последовательностей, полученные на основе разработанного алгоритма, удовлетворяют теоретической границе Вэлча (1), однако, не являются оптимальными с позиции достижения максимально возможного объёма, а также значительно уступают известным минимаксным ансамблям [1, 5 – 6] двоичных и троичных и бинарных последовательностей с позиции их технической реализуемости.

Литература

1. Ипатов В.П. Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. – М.: Радио и связь, 1992. – 152 с.

2. Парсаев Н.В., Леухин А.Н. Дискретные фазокодированные последовательности с нулевым уровнем боковых лепестков циклической автокорреляционной функции размерности квадратных чисел // Вестник Марийского государственного технического университета. Серия: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. – 2008. – № 3. – С. 36 – 45.

3. Коробов Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. – М.: Наука, 1989. – 240 с.

4. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля: в 2 т. / Пер. с англ.; Под ред. В.И. Нечаева. – М.: Мир, 1988. – 820 с.

5. Ипатов В.П. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. – М.: Техносфера, 2007.

6. Гантмахер В.Е., Быстров Н.Е., Чеботарёв Д.В. Шумоподобные сигналы. Анализ, синтез, обработка. – СПб.: Наука и техника, 2005. – 400 с.